

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**E.A.P. DE FÍSICA**

**Estudio de los modos resonantes ferromagnéticos del  
sistema válvula de espín**

**IrMn(151515nm)/Co(555nm)/Ru(ttt)/NiFe(555nm)**

**(t=2.4,3.2,20 nm)**

**TESIS**

**Para obtener el Título Profesional de Licenciado en Física  
Modalidad M1**

**AUTOR**

**Heisemberg Samuel Tarazona Coronel**

**Lima – Perú**

**2014**

Asesor de Tesis: Dr. Carlos Landauro Sáenz

Miembro del Jurado: Víctor Andrés Rodríguez Peña

Presidente del Jurado: Justiniano Quispe Marcatoma

# Índice general

<b>Índice</b>	<b>IV</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VII</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>IX</b>
<b>Resumen</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Las válvulas de espín: formación y técnica de estudio</b>	<b>5</b>
2.1. La válvula de espín . . . . .	5
2.1.1. Fenomenología del magneto-transporte en la válvula de espín . . . . .	6
2.2. La técnica de pulverización catódica ( <i>sputtering</i> ) . . . . .	6
2.2.1. La técnica de <i>magnetron sputtering</i> . . . . .	7
2.3. Resonancia Ferromagnética . . . . .	9
<b>3. Breve revisión sobre las interacciones magnéticas</b>	<b>13</b>
3.1. Energía de Zeeman . . . . .	13
3.2. Anisotropía magnética . . . . .	14
3.2.1. Anisotropía de forma . . . . .	14
3.2.2. Anisotropía magnetocristalina . . . . .	15
3.3. Acoplamiento de intercambio intercapa . . . . .	17
3.3.1. Acoplamiento bilineal . . . . .	18
3.3.2. Acoplamiento bicuadrático . . . . .	20
3.4. Intercambio de sesgo ( <i>Exchange bias</i> ) . . . . .	21
3.4.1. Modelo de Meiklejohn y Bean . . . . .	22
3.4.2. Modelo de la pared de dominio antiferromagnético de Mauri . . . . .	23
<b>4. Modelo fenomenológico</b>	<b>25</b>
4.1. El sistema de estudio . . . . .	25
4.2. Densidad de energía libre total . . . . .	26
4.2.1. Minimización de la energía . . . . .	29

4.3. La ecuación de Landau - Lifshitz . . . . .	30
4.4. Método de análisis . . . . .	32
4.5. Implementación numérica . . . . .	33
4.5.1. Frecuencia de resonancia $\omega$ versus campo aplicado $H$ . . . . .	34
4.5.2. Dependencia angular $\alpha$ del campo de resonancia $H_R$ . . . . .	34
<b>5. Aplicación del modelo al sistema IrMn/Co/Ru(t)/NiFe</b>	<b>37</b>
5.1. Factor de acoplamiento versus frecuencia de resonancia . . . . .	37
5.1.1. Acoplamiento ferromagnético $J_{bl} > 0$ . . . . .	39
5.1.2. Acoplamiento antiferromagnético $J_{bl} < 0$ . . . . .	41
5.2. Factor de acoplamiento y la dependencia angular de $H_R$ . . . . .	42
5.3. Estructura del sistema . . . . .	45
5.4. Comparación con los datos experimentales . . . . .	46
5.4.1. El caso del acoplamiento cero para $t_{Ru} = 200 \text{ \AA}$ . . . . .	47
5.4.2. El caso del acoplamiento ferromagnético para $t_{Ru} = 24 \text{ \AA}$ . . . . .	49
5.4.3. El caso del acoplamiento antiferromagnético para $t_{Ru} = 32 \text{ \AA}$ . . . . .	52
5.5. Resumen del capítulo . . . . .	54
<b>6. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>57</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	57
6.2. Perspectivas . . . . .	58
<b>A. Complemento sobre detalles de la determinación de la relación de dispersión</b>	<b>61</b>
A.1. Transformación de la ecuación de Landau-Lifshitz a coordenadas esféricas . . . . .	61
A.2. Expansión en serie de Taylor al segundo orden de la función de energía libre . . . . .	63
A.2.1. La ecuación de Landau-Lifshitz para la capa FM1 ( $i = 1$ ) . . . . .	65
A.2.2. La ecuación de Landau-Lifshitz para la capa FM2 ( $i = 2$ ) . . . . .	66
A.2.3. La ecuación de Landau-Lifshitz para la subred AFM ( $i = 3$ ) . . . . .	68
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>
<b>Agradecimiento</b>	<b>93</b>

# Índice de figuras

2.1.	Diagrama esquemático de la estructura de una válvula de espín . . . . .	6
2.2.	Diagrama esquemático de un sistema de Sputtering DC. . . . .	8
2.3.	Diagrama operacional de un <i>magnetron sputtering</i> . . . . .	9
2.4.	(a) Diagrama esquemático de un espectrómetro de resonancia ferromagnética donde $\vec{h}_{rf}$ representa al campo de radiofrecuencia. (b) Absorción resonante magnética para el espín del electrón, donde $h$ es la constante de Planck y $f$ es la frecuencia de la radiación de microonda . . . . .	10
3.1.	En este gráfico se muestra ilustrativamente la aparición de un campo desmagnetizante $\vec{H}_{demag}$ como consecuencia de una distribución de dipolos magnéticos en los bordes de la muestra elipsoidal debido al campo externo $\vec{H}$ . . . . .	14
3.2.	(a) Representación esquemática de una película delgada donde $\hat{n}$ es la normal al plano, $\vec{M}$ es el vector magnetización y (b) la curva de energía en función de $\theta$ (véase la ec. 3.4). . . . .	16
3.3.	(a) Representación de la celda unitaria de una estructura hcp con el eje fácil a lo largo de la dirección [0001] y (b) superficie de energía magnetocristalina para $K_1 > 0$ en el que se observa claramente la simetría uniaxial . . . . .	17
3.4.	Representación esquemática del acople magnético que existe entre dos capas ferromagnéticas (FM) separadas por una capa NM que se manifiesta en una orientación relativa, dada por el ángulo $\beta$ , entre las magnetizaciones. . . . .	17
3.5.	Representación esquemática de un acoplamiento bilineal en el que las magnetizaciones se alinean de forma paralela (acople ferromagnético) o antiparalela (acople antiferromagnético) . . . . .	18
3.6.	Comportamiento oscilatorio del acoplamiento de intercambio intercapa bilineal en el sistema de válvula de espín Si/Ru(150 Å)/IrMn(150 Å)/Co(50 Å)/Ru( $t_{Ru}$ )/Py(50 Å)/Ru(50 Å) (Tomado de [Alayo 09]). . . . .	20
3.7.	Diagrama de fase de los factores de acoplamiento $J_{bl}$ (bilineal) y $J_{bc}$ (bicuadrático) en ausencia de campo externo, basado en el esquema de la ref. [Demokritov 98]. Las regiones coloreadas con diferentes colores indican las diferentes fases. . . . .	22
3.8.	Corrimiento de la curva de histéresis producto de una interacción de intercambio directo entre un material ferromagnético y otro antiferromagnético. . . . .	23

3.9.	Representación esquemática de una capa FM y otra AFM en contacto atómico, en el que se da el fenómeno de “ <i>Exchange bias</i> ” donde $\hat{u}$ es el eje de anisotropía unidireccional que coincide con el eje uniaxial de la capa FM. Esta disposición está acorde con nuestro sistema de referencia de la figura 2.1. . . . .	24
4.1.	a) Diagrama esquemático de una válvula de espín. b) Sistema de coordenadas usado en el presente trabajo. . . . .	26
4.2.	Representación gráfica de la Ec. 4.16 en el que se muestra el término de precesión (color azul) y el término de amortiguamiento (color verde) que hace que con el tiempo la magnetización se alinee paralela al campo (color amarillo). . . . .	31
4.3.	Algoritmo que muestra ilustrativamente la lógica del programa implementado en FORTRAN 90 para determinar (a) la frecuencia de resonancia versus el campo aplicado y (b) la dependencia angular del campo de resonancia . . . . .	35
5.1.	Relación entre la frecuencia de resonancia $f$ y el campo externo $H$ , obtenidas a partir de la relación de dispersión (véase la Ec. 5.3), la cual fue simulada con los siguientes parámetros: $J_{bl} = 0.5 \text{ erg/cm}^2$ , $J_{bc} = 0$ . $H_E = 0$ (líneas sólidas), $H_E = 250 \text{ Oe}$ (líneas punteadas). Capa FM1: $4\pi M_1 = 6 \text{ kG}$ , $H_{keff_1} = -6 \text{ kOe}$ , $H_{U1} = 0 \text{ Oe}$ , $t_1 = 100 \text{ Å}$ , $\gamma_1/2\pi = 2.8 \text{ GHz kOe}^{-1}$ . Capa FM2: $4\pi M_2 = 10 \text{ kG}$ , $H_{keff_2} = -10 \text{ kOe}$ , $H_{U2} = 10 \text{ Oe}$ , $t_2 = 200 \text{ Å}$ , $\gamma_2/2\pi = 2.8 \text{ GHz kOe}^{-1}$ . . . . .	39
5.2.	Dependencia entre la frecuencia $f$ y el campo $H$ resonante para distintos valores del factor de acoplamiento $J_{bl}$ . Las líneas sólidas (modo acústico) y punteadas (modo óptico) del mismo color corresponden a un solo valor de $J_{bl}$ indicado en la leyenda. Los parámetros utilizados para la simulación fueron los mismos que el de la figura 5.1 con $H_E = 0$ . . . . .	40
5.3.	Relación de dispersión de un acoplamiento antiferromagnético para $J_{bl} = -2.0 \text{ erg/cm}^2$ . Los parámetros para la simulación fueron los mismos que se usaron en en la figura 5.1 con $H_E = 0$ (líneas sólidas) y $H_E = 250 \text{ Oe}$ (líneas punteadas) . . . . .	41
5.4.	Relación de dispersión para diferentes valores del factor de acoplamiento $J_{bl}$ antiferromagnético. Las líneas sólidas (modo óptico) y punteadas (modo acústico) de un mismo color corresponden al mismo valor de $J_{bl}$ . Los parámetros usados en la simulación fueron las mismas que el de la figura 5.1 con $H_E = 250 \text{ Oe}$ . . . . .	42
5.5.	Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo resonante ( $H_R$ ) para diferentes valores del campo de acoplamiento bilineal ( $H_{bl}$ ). La línea azul corresponde al modo acústico y la línea verde al modo óptico. Los parámetros para la simulación fueron: $H_{u1} = H_{u2} = 3.0 \text{ Oe}$ , $4\pi M_1 = 10 \text{ kOe}$ , $4\pi M_2 = 10.3 \text{ kOe}$ , $t_1 = t_2 = 100 \text{ Å}$ , $H_E = 0.010 \text{ kOe}$ , $H_{u1}^{out} = H_{u2}^{out} = 0.0 \text{ kOe}$ , $J_{bc} = 0$ . . . . .	43
5.6.	Dependencia del campo de FMR ( $H_R$ ) en función del campo de acoplamiento bilineal ( $H_{bl}$ ) tomados de los datos mostrados en la figura 5.5. La línea azul corresponde a los campos de resonancia del modo óptico (capa FM2) y la línea roja al modo acústico (capa FM1). Estos campos de resonancia fueron tomados en $\alpha = 0^0$ . . . . .	44

5.7. Esquema del sistema IrMn/Co/Ru(t)/NiFe. (FM) hace referencia a una capa ferromagnética, (AFM) capa antiferromagnética, (NM) capa no magnética. Las capas no magnéticas de Ru en los extremos de la multicapa se emplean para proteger el sistema bajo estudio. . . . .	45
5.8. Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo de resonancia ( $H_R$ ). La línea azul representa el ajuste teórico y los puntos rojos son los datos experimentales tomados de la ref. [Alayo 11]. Los parámetros de ajuste son mostrados en la tabla 5.2. . . . .	47
5.9. Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo de resonancia ( $H_R$ ) para diferentes valores de los campos de anisotropía uniaxial $H_{u1}$ (capa libre, NiFe) y $H_{u2}$ (capa fija, Co). Los puntos rojos son los mismos datos experimentales que los de la fig. 5.8. Los parámetros son aquellos mostrados en la tabla 5.2. . . . .	49
5.10. Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo de resonancia $H_R$ donde los puntos rojos son datos experimentales tomados de la ref. [Alayo 11] y las líneas azules corresponden al ajuste realizado con los parámetros indicados en la tabla 5.3. Del ajuste se obtiene que $J_{bl} + 2J_{bc} = 15.0 \times 10^{-3} \text{ erg/cm}^2$ . . . . .	50
5.11. Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo de resonancia ( $H_R$ ) para diferentes valores del factor de acoplamiento bilineal $J_{bl}$ . Los puntos rojos corresponden a los mismos datos experimentales que se muestran en la fig. 5.10. Los parámetros de ajuste se indican en la tabla 5.3. . . . .	51
5.12. Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo de resonancia $H_R$ para el caso del acoplamiento antiferromagnético. Los puntos rojo son los datos experimentales tomados de la ref. [Alayo 11], la línea azul es el ajuste teórico para $J_{bl} + 2J_{bc} = -4.3 \text{ erg/cm}^2$ . . . . .	52
5.13. Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo de resonancia ( $H_R$ ). Los puntos rojos corresponden a los mismos datos experimentales que se muestran en la fig. 5.12. Los parámetros de ajuste se indican en la tabla 5.4. . . . .	54
A.1. Representación de un sistema de coordenadas esféricas en el que se muestran los vectores unitarios $\hat{r}_i$ , $\hat{\theta}_i$ y $\hat{\phi}_i$ en función de los vectores unitarios $\hat{i}$ , $\hat{j}$ , $\hat{k}$ . . . . .	62





# Índice de cuadros

3.1.	Algunos valores para el factor desmagnetizante $N_d$ (SI), tomado de [Guimarães 09]	15
5.1.	En esta tabla se indican los valores del espesor ( $t$ ), campo uniaxial ( $H_u$ ) y magnetización de saturación ( $M_s$ ) correspondientes a cada capa. (Los datos fueron tomados de la ref. [Alayo 11] donde se estudia el mismo sistema en forma experimental).	46
5.2.	Parámetros empleados para el ajuste mostrado en la fig. 5.8. La simulación de la relación de dispersión (véase la ec. 4.23) se realizó siguiendo el algoritmo descrito esquemáticamente en la fig. 4.3b, con $H_E = 196$ Oe. Siendo $H_{Keffi} = H_{ui}^{out} - 4\pi M_i$ ( $i = 1, 2$ ) el campo efectivo de alguna anisotropía fuera del plano de las capas.	48
5.3.	Parámetros utilizados en el ajuste teórico, mostrado en la fig. 5.10, de los datos de FMR del sistema válvula de espín IrMn(150Å)/Co(50Å)/Ru(24Å)/NiFe(50Å) con $H_E = 198$ Oe, siendo $g$ el factor de Landé.	51
5.4.	Los parámetros mostrados en esta tabla han sido utilizados en el ajuste del sistema IrMn(150Å)/Co(50Å)/Ru(32Å)/NiFe(50Å) el cual se muestra en la fig. 5.12. El campo de anisotropía de intercambio es $H_E = 193$	53



# Resumen

En el presente trabajo se hace un estudio teórico de la resonancia ferromagnética en un tipo especial de multicapa magnética llamada “válvula de espín”. Dicha válvula de espín consiste de dos capas ferromagnéticas separadas por un espaciador no magnético que en conjunto se encuentran sobre un sustrato antiferromagnético. Respecto a la válvula de espín es bien sabido que el espesor del espaciador no magnético juega un rol clave en el comportamiento electrónico y magnético de esta multicapa, la cual, en ausencia de un campo externo, da lugar a la existencia de un acoplamiento entre las magnetizaciones de las capas ferromagnéticas. Para estudiar este acoplamiento magnético se hace uso de la ecuación de Landau-Lifshitz ya que ésta describe muy bien la dinámica de la magnetización y su evolución temporal, donde la frecuencia de precesión de la magnetización está determinada por el campo interno local  $H_{eff}$ . Este campo proviene de distintas fuentes tales como: anisotropías de forma, magnetocristalina, de superficie y campo externo. Por ende, siguiendo el modelo de Smit y Beljers [Smit 55], se puede utilizar la energía libre total del sistema para obtener el campo efectivo interno  $H_{eff}$  y resolver la ecuación de Landau-Lifshitz para pequeñas oscilaciones de la magnetización. Como resultado, se obtiene la relación de dispersión en la que se encuentra implícita la dependencia entre la frecuencia de resonancia y el campo externo; que está en buen acuerdo con lo publicado en la literatura [Layadi 05],[Zhang 94]. Por otro lado, si se mantiene fija la frecuencia de resonancia  $f$ , se obtiene el campo de resonancia en función de su orientación dentro del plano de las capas, las cuales se encuentran también en buen acuerdo con lo publicado [Azevedo 05].

Además cabe resaltar que estos resultados teóricos se han utilizado para el estudio del sistema IrMn/Co/Ru(t)/FeNi [Alayo 11], para distintos espesores  $t$  de la capa no magnética, identificándose tres tipos de acoplamiento de intercambio intercapa o fuerza de acoplamiento  $J$ . Para  $t = 200 \text{ \AA}$  se observa una simetría en la dependencia angular del campo de resonancia indicando que no existe un acoplamiento entre las capas magnéticas debido al gran espesor de la capa espaciadora. Para  $t = 32 \text{ \AA}$  se observa un acoplamiento antiferromagnético; es decir, las magnetizaciones se encuentran alineadas antiparalelamente en el cual hay una gran contribución del acoplamiento bicuadrático. Finalmente, para  $t = 24 \text{ \AA}$  se observa un acoplamiento paralelo o ferromagnético de las magnetizaciones.



# Capítulo 1

## Introducción

La época en que vivimos, llamada “el siglo de la información”, se caracteriza principalmente por los avances acelerados que experimentan la ciencia y la tecnología. Estos avances han ocasionado un gran impacto en la sociedad, cambiando la manera en que vivimos y en gran medida haciéndonos dependientes de las nuevas tecnologías emergentes. De igual manera, los conocimientos obtenidos han expandido nuestro entendimiento de cómo funciona el universo medible, desde el mundo cuántico hasta el vasto cosmos. Por ello resulta claro señalar que en estos tiempos existe mucha información disponible acerca de todo lo que nos rodea, información que se ha obtenido gracias al producto de la investigación realizada ya desde tiempos antiguos. La búsqueda de la verdad acerca de lo que observamos; es decir, la búsqueda del conocimiento sobre el mecanismo subyacente detrás de los fenómenos observables ha sido, en mi opinión, el motor que ha impulsado la investigación y que ha llevado a la ciencia a alcanzar esta etapa de madurez. Por ende, resulta inevitable reflexionar acerca de cómo al hombre, desde sus inicios, le preocupó la manera de cómo almacenar la información que iba adquiriendo, producto de su conocimiento acerca de su entorno. Empezó tal vez dibujando sucesos en las paredes de las cuevas, como una manera de recordar y compartir su experiencia vivida a sus generaciones. Ya con la aparición de la escritura, el descubrimiento del papiro y luego la invención del papel, el hombre pudo transmitir y almacenar información de modo sencillo y rápido. Paralelamente, la matemática ocupaba gran parte de su mente en su quehacer diario. Así, el hombre se vió en la necesidad de inventar máquinas, desde el ábaco hasta las actuales supercomputadoras, capaces de ayudarle a realizar operaciones básicas de manera rápida y de acuerdo a sus necesidades.

En los primeros desarrollos de las computadoras, los datos, que consistían en bits de información, eran almacenados en una matriz de núcleos magnéticos formados por pequeños toroides magnéticos en los cuales se almacenaba un bit, cada bit “0” o “1” estaba representado por la dirección de magnetización de dicho toroide. Los componentes principales, en aquella época, de los circuitos electrónicos eran resistores, inductores, capacitores y los tubos de vacío; un ejemplo de ello lo encontramos en la famosa computadora ENIAC, la cual consistía de alrededor de 17000 tubos de vacío. Luego, con la invención de los transistores bipolares y su posterior desarrollo en los Laboratorios Bell (*Bell Telephone Laboratories*) en 1947/48 [Allan 01], dirigido por Murray Hill, la tecnología de las computadoras experimentó un cambio muy acelerado y con ello

también un dispositivo muy importante de esta máquina, que es su memoria de almacenamiento interna. En esta etapa cabe mencionar que los estudios acerca de las propiedades electrónicas de los materiales permitió clasificar a los materiales en metales, aislantes y semiconductores; sobre estos últimos se basó la invención de los circuitos integrados hechos independientemente por Kilby y Noyce en 1958, tal como lo indica Arns [Arns 98]. Con ello empezó la gran carrera de la industria de los semiconductores cuyo impacto lo vemos hasta el día de hoy. No obstante, a medida que pasa el tiempo los circuitos integrados se hacen cada vez más pequeños. Además, sabemos que dicha tendencia de disminuir el tamaño de los dispositivos no seguirá para siempre debido al límite microscópico de los materiales. Por lo tanto, para mantener dicha tasa de desarrollo se requiere de investigación e innovación lo cual significa incursionar en el estudio del mundo nanoscópico y buscar nuevos mecanismos intrínsecos o extrínsecos que sirvan como base en la construcción de nuevos dispositivos tecnológicos. Esto debido al hecho que al disminuir el tamaño de los materiales resulta que sus propiedades físicas, comparadas con las de su contraparte macroscópica, cambian drásticamente, abriendo las puertas de un mundo inimaginable de posibilidades en el que estas nuevas propiedades físicas puedan ser utilizadas en el diseño y en la construcción de novedosos dispositivos nanoscópicos; las cuales pueden ser tan cruciales como cambiar el desarrollo socio-económico de un país entero. Las tecnologías ampliamente usadas para celdas de memorias de las computadoras, basadas en transistores, son las memorias de acceso aleatorio estáticas (SRAM), memorias de acceso aleatorio dinámicas (DRAM) y las memorias Flash. Sin embargo, este último tipo de memorias son volátiles; es decir, necesitan ser alimentadas con corriente para mantener su estado de memoria. Además, sólo se puede escribir o leer cierto número de veces luego de los cuales estos sistemas son inservibles.

El siguiente paso en el desarrollo de las memorias de computadora fue el descubrimiento en 1986, por Peter Grünberg y su grupo [Grünberg 86], acerca de la existencia de un acople magnético entre multicapas de Fe que se encontraban separadas por capas no magnéticas de Au o Cr. Este acoplamiento llegó a llamarse acoplamiento antiferromagnético debido a que las magnetizaciones de las capas de Fe se encontraban alineadas antiparalelamente unas con otras. Dos años después de este reporte, en 1988, mediciones de la magnetorresistencia en multicapas de Fe/Cr llevados a cabo por Baibich et al. [Baibich 88] y Binasch, et al. [Binasch 89] indicaban una disminución muy grande en la resistencia al aplicar un campo externo a estas multicapas, que en algunos casos llegaba hasta a un 80 %. Debido a esta alta resistencia, a este efecto se le llamó Magnetorresistencia Gigante, término acuñado por Baibich. Por otro lado, Stuart Parkin, pionero en la tecnología de memorias de almacenamiento, junto con su grupo de IBM, publicó un trabajo en 1990 [Parkin 90] en el cual reportaba por primera vez la existencia de una oscilación de la magnetorresistencia gigante al variar el espesor de las capas no magnéticas; es decir, la orientación relativa de las magnetizaciones de las capas ferromagnéticas dependen, de forma oscilatoria, del espesor de las capas no magnéticas. Estos tres descubrimientos marcaron un hito en el campo de la electrónica convencional y de la ciencia en general. Así, se abrió la puerta hacia nuevas fronteras tanto en los aspectos fundamentales como tecnológicos y al descubrimiento de nuevos fenómenos magneto-espín-eléctricos, estableciéndose nuevas perspectivas tecnológicas que propiciaron el nacimiento de una nueva ciencia. Este nueva ciencia o campo de investigación fue llamada “espintrónica”, ya que en ella se manipula, en lugar de la carga, el espín del electrón

para la fabricación de dispositivos.

El efecto de la magnetorresistencia gigante (GMR) consiste en la gran disminución de la resistencia al aplicar un campo externo a multicapas ferromagnéticas separadas por capas espaciadores no magnéticas, esta alta resistencia se debe a la orientación antiparalela de las magnetizaciones de las capas ferromagnéticas en ausencia de campo. El efecto GMR pronto atrajo la atención tecnológica para su aplicación al diseño de sensores magnéticos y nació la idea de construir una memoria de acceso aleatorio magnética (MRAMs, por sus siglas en inglés) universal [Smith 96], [Wolf 01]. Dieny y sus colaboradores [Dieny 91], en 1991, fueron los primeros en proponer el sistema de “válvula de espín” para la fabricación de sensores magnéticos cuya primera aplicación fue las cabeceras lectoras de los discos duros [Tsang 94] que entraron al mercado desde 1997 a través de IBM [Belleson 98]. Las válvulas de espín consisten de cuatro capas funcionales: dos capas ferromagnéticas separadas por una capa no magnética en la que una de ellas se encuentra en contacto con una capa antiferromagnética. Esta estructura da lugar a dos fenómenos muy importantes: el acoplamiento entre las capas ferromagnéticas llamado “acoplamiento de intercambio intercapa” y el acople entre la capa ferromagnética y la capa antiferromagnética llamado “*Exchange bias*”, este último se manifiesta en el corrimiento de la curva de histéresis. Estos dos fenómenos han sido muy bien estudiados desde su descubrimiento pero hoy en día aún no hay una teoría que explique, de forma general, todas las observaciones experimentales realizadas. En la actualidad existen diversas técnicas experimentales que permiten caracterizar y estudiar las válvulas de espín y sistemas multicapas magnéticas relacionadas; alguna de ellas son: Surface Magneto-Optic Kerr Effect (SMOKE) [Bader 99], Magnetic Force Microscope (MFM), Neutron diffraction [Squires 97], X-ray Magnetic Circular Dichroism (XMCD), Ferromagnetic Resonance (FMR) junto con el FMR force microscopy (FMRFM) [Zhang 94]. No obstante la resonancia ferromagnética (FMR) ha demostrado ser, desde hace 50 años, un técnica que provee información cuantitativa y confiable de los materiales ferromagnéticos como son: el factor de Landé en los sólidos, anisotropías magnéticas, acoplamiento de intercambio intercapa y cantidades relacionadas [Lindner 03]. En el presente trabajo se hará uso de la resonancia ferromagnética para el estudio teórico de la válvula de espín, ya que este sistema es de interés actualmente por su gran potencial tecnológico para ser usados en la siguiente generación de memorias no volátiles de alta densidad y chips con alta estabilidad térmica [Ikeda 10]. Además, se emplearán métodos bien establecidos [Smit 55] para obtener la relación de dispersión y así analizar el sistema IrMn/Co/Ru(t)/NiFe y comparar los resultados teóricos con medidas experimentales facilitadas.

La presente tesis se divide en cinco capítulos. En el primer capítulo se resumen ciertos hechos históricos relevantes que conllevaron al desarrollo de la válvula de espín. Luego, en el capítulo dos, se describe brevemente la estructura y magneto-transporte de la válvula de espín junto a dos técnicas experimentales: el *magnetron sputtering*, que sirve para muchos fines relacionados con la pulverización de superficies y deposición de películas delgadas; y la resonancia ferromagnética, que sirve para el estudio de las propiedades magnéticas de multicapas relacionadas. En el capítulo tres se discute de forma general las diversas interacciones que ocurren dentro de la válvula de espín, entre ellas el acoplamiento de intercambio intercapa, el *exchange bias* y algunas fuentes que originan la anisotropía magnética. Con esta base teórica, el capítulo cuatro

se enfoca en el planteo del modelo para la densidad de energía libre y el uso del método empleado para obtener la relación de dispersión donde se considera la ecuación de Landau-Lifshitz para la dinámica de la magnetización. En el capítulo cinco se discuten los resultados obtenidos y se comparan con experimentos en el sistema IrMn/Co/Ru(t)/NiFe. Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo y las perspectivas de posibles trabajos futuros.



## Capítulo 2

# Las válvulas de espín: formación y técnica de estudio

En este capítulo se presentará una breve descripción de la estructura de la válvula de espín así como la fenomenología de su magneto-transporte. Asimismo, se describirá el mecanismo de deposición de un *magnetron sputtering* y se discutirá la técnica de resonancia ferromagnética poniendo énfasis en la ecuación de Landau-Lifshitz la cual describe la dinámica de la magnetización en la válvula de espín.

### 2.1. La válvula de espín

Una válvula de espín es un tipo especial de multicapa magnética que consiste de dos capas ferromagnéticas, FM1 y FM2, separadas por una capa espaciadora no magnética, NM, en la que una de ellas está en contacto atómico con una capa antiferromagnética, AFM, como se indica en la figura 2.1. En este sistema se presentan dos fenómenos muy importantes tanto por su aplicación en el ámbito tecnológico como por su entendimiento de su física fundamental:

1. Uno de dichos fenómenos es el acoplamiento magnético entre las capas FM1 y FM2 que depende, en gran medida, del espesor del espaciador NM. A la capa FM1 se le llama capa libre ya que frente a un campo externo su magnetización es libre de rotar.
2. El otro fenómeno es el intercambio de sesgo o “*Exchange bias*” que resulta de la interacción entre la capa ferromagnética FM2 y la capa antiferromagnética AFM. Lo cual fija la magnetización de la capa FM2 hacia una dirección preferencial que está determinada por la anisotropía unidireccional generada en la interface FM2/AFM. En este esquema la capa fija es la capa FM2 debido a que su magnetización va a estar fijada por el material antiferromagnético.

La combinación de estos dos fenómenos lo hacen perfecto para usarlo como un sensor de campos magnéticos débiles, como es el caso de las cabezeras lectoras de los discos duros presentes en la computadoras modernas de hoy en día, así como también en celdas de memoria de

las futuras computadoras o como chips con alta estabilidad térmica [Ikeda 10]. Para ello tiene que hacerse estudios del rol que juega el espaciador NM, teniendo en cuenta su espesor y el tipo de material, en las propiedades magnetoeléctricas de la válvula de espín tal que nos permitan seleccionar, de entre una serie de materiales, los materiales óptimos de acuerdo a las propiedades requeridas.



Figura 2.1: Diagrama esquemático de la estructura de una válvula de espín

### 2.1.1. Fenomenología del magneto-transporte en la válvula de espín

El término “válvula de espín ” se refiere al efecto de válvula que tiene este sistema al paso de una corriente polarizada; es decir,

## 2.2. La técnica de pulverización catódica (*sputtering*)

Con relación a las películas delgadas, hoy en día existen diversas tecnologías de deposición [Mahan 00] debido quizás a la gran diversidad de fenómenos que se dan en este tipo de sistemas; por ello una sola técnica parece no ser suficiente para realizar los estudios adecuados de sus propiedades físicas. Por lo que manipular con un mayor control y precisión los procesos de deposición, crecimiento y estudio de la microestructura de películas delgadas se ha convertido en una carrera científica a nivel mundial. Debido a esto encontramos tecnologías emergentes para la deposición y recubrimiento de películas delgadas sobre sustratos o superficies, tales como: deposición de polímero al vacío (VPD del inglés *vacuum polymer deposition*), deposición de lámina atómica (ALD del inglés *atomic layer deposition*), etc. [Peter 10]; y diversas tecnología convencionales tales como: la deposición física de vapor (PVD del inglés *Physical vapor deposition*), deposición química de vapor (CVD del inglés *Chemical vapor deposition*), deposición por arco catódico (CAD del inglés *Cathodic arc deposition*), implantación iónica (*Ion Plating*) entre otros, cuya aplicación lo vemos en tecnologías relacionadas con semiconductores, ingeniería solar, aplicaciones médicas que involucren recubrimientos resistentes al desgaste para implantes y

prótesis, construcción de superredes, nanoláminas, nanocompuestos y mucho más [Hwan 08]. Los procesos de deposición física de vapor (PVD) tienen que ver con un método particular de depositar películas delgadas sobre una o varias superficies por condensación de una forma vaporizada de un material sólido. Un ejemplo aplicativo de ello sería la válvula de espín ya que ésta consiste de cuatro capas o películas delgadas.

Uno de los procesos PVD muy popular en la investigación científica y en la industria es la deposición por *sputtering* debido a su sencillez, rapidez y eficiencia, la cual se explicará a continuación.

Por “*Sputtering*” entendemos aquel proceso por el cual se extraen átomos de la superficie de un material mediante el bombardeo de partículas energéticas ionizadas, este bombardeo resulta en un vapor debido a procesos puramente físicos [Peter 10]. Básicamente se puede entender que dicha extracción de átomos del material del blanco se logra por intercambio de momento que se da entre los iones que impactan y los átomos de la superficie [Westwood 03]. Hoy en día la técnica de *Sputtering* es usada para muchos fines como por ejemplo en la erosión de una superficie, la limpieza de una superficie y la deposición de películas delgadas.

Existen varios sistemas de *sputtering* para la deposición de películas delgadas, donde el más simple es el *sputtering* de corriente continua DC, que consiste de dos electrodos planos: un cátodo sobre el cual se encuentra el blanco (material cuyos átomos se desea depositar) y de un ánodo sobre el cual se encuentra el sustrato (en el que se va a depositar los átomos extraídos del blanco), ver figura 2.2. Estos electrodos se encuentran bajo una diferencia de potencial que podría ser DC (si el blanco es un conductor) o radio frecuencia RF (si el blanco es un dieléctrico o aislante) como se indica en la figura 2.2, todo este sistema se encuentra en una cámara de alto vacío usualmente menor que 3mTorr. Además, se utilizan átomos de argón ionizados  $\text{Ar}^+$  para el bombardeo del blanco durante el cual se generan electrones libres que a la vez ionizan los átomos de Ar y estos son acelerados al blanco generando así un vapor que luego es depositado sobre el sustrato.

Este proceso de *sputtering* y deposición es relativamente rápido; sin embargo, debido a la generación de electrones libres y por ende la creación de cierto plasma se originan corrientes contaminantes y sobrecalentamiento en el sustrato lo cual no lo hace muy eficiente. Ante ello aparece una nueva alternativa que soluciona estos problemas al aplicarse un campo magnético sobre el cátodo llamándose a la nueva técnica *sputtering magnetrón*.

### 2.2.1. La técnica de *magnetron sputtering*

Luego de su descubrimiento por Penning en 1935 [Penning 35], el *sputtering magnetrón* desde 1970 a llegado a ser una de las técnicas muy populares tanto en la industria como en la investigación científica debido a su sencillez y rapidez de deposición, eso lo podemos corroborar revisando la cantidad de publicaciones hechas con *sputtering magnetrón* en comparación al uso de otras técnicas de deposición. Existen dos tipos de *sputtering magnetrón* ampliamente usados: el tipo cilíndrico y el tipo planar. La figura 2.3 muestra un magnetrón tipo planar, en ella se puede observar que cierto arreglo de imanes en el cátodo genera un campo magnético cercano

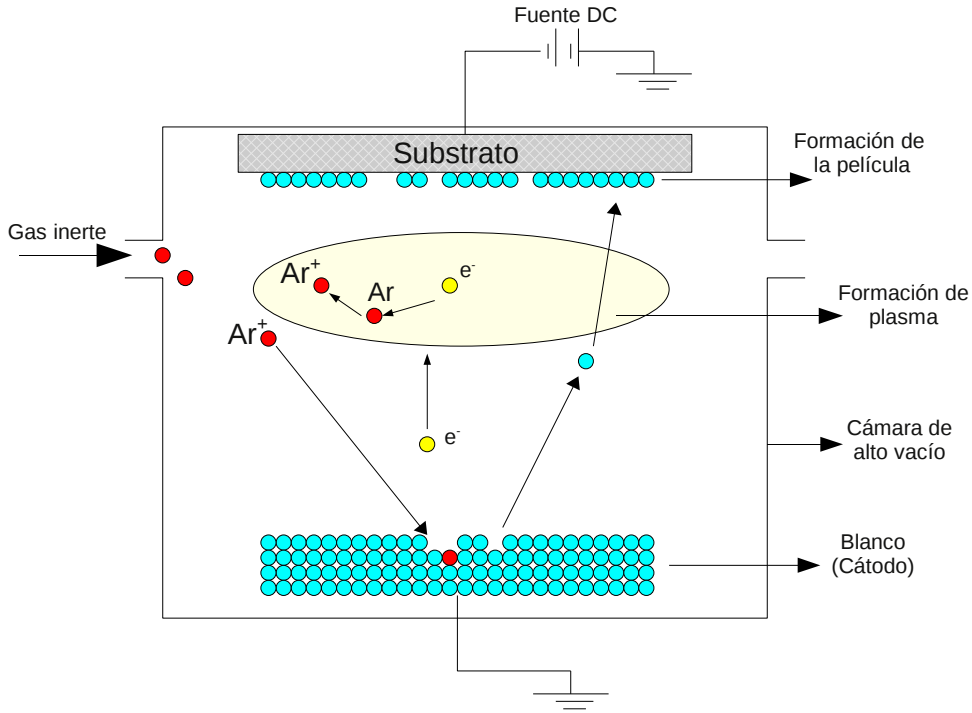


Figura 2.2: Diagrama esquemático de un sistema de Sputtering DC.

al blanco, éste campo magnético es muy importante ya que llega a confinar a los electrones libres, que resultan de la colisión entre los iones de  $\text{Ar}^+$  y los átomos de la superficie, siguiendo un movimiento helicoidal alrededor de las líneas de campo regidas de acuerdo a la fuerza de Lorentz [Peter 10]:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.1)$$

donde  $q$  es la carga del electrón,  $\vec{E}$  es el campo eléctrico generado debido a la diferencia de potencial entre los electrodos,  $\vec{v}$  la velocidad del electrón y  $\vec{B}$  el campo magnético cerca del cátodo, por lo que los electrones son mantenidos cerca del cátodo reduciendo de esa manera el impacto de electrones sobre el sustrato haciendo que la tasa de deposición se incremente y sea más limpia.

Por otro lado, es importante señalar que para tener un mayor control de lo que se quiere depositar se debe conocer una serie de fenómenos los cuales involucran la física de superficies, física de plasmas, física de colisiones, entre otros; además del manejo de muchos parámetros que están presentes durante el proceso de deposición; debido a eso, las simulaciones computacionales [Depla 08], hechas con códigos de Monte Carlo, MC, o dinámica molecular, MD, resultan ser muy importantes ya que permiten determinar parámetros precisos para ser usados pertinentemente en los procesos de deposición, ya que no se puede obrar a prueba y error debido a los

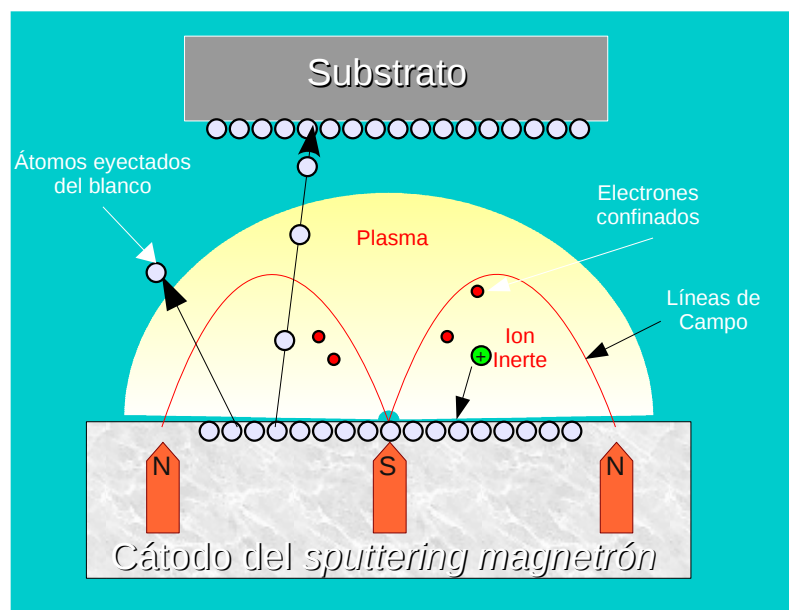


Figura 2.3: Diagrama operacional de un *magnetron sputtering*

grandes costos de los materiales y al tiempo.

## 2.3. Resonancia Ferromagnética

Una técnica, entre otras tantas, que nos permite caracterizar un material magnético es la resonancia ferromagnética (FMR del inglés *ferromagnetic resonance*) conocida por ser una técnica experimental muy potente y que generalmente se aplica al estudio de las propiedades magnéticas de cristales sólidos (*bulk*) y de películas delgadas ferromagnéticas [Farle 98], a través del estudio de las ondas de espines y de la dinámica del espín del electrón. La gran utilidad de ésta técnica empezó a ser evidente desde hace más de 50 años atrás [Ament 55],[Walker 57], [Kittel 58] luego del descubrimiento de este tipo de resonancia hecho por Griffiths [Griffiths 46] en 1946, aunque ya V. K. Arkad'yev [Arkad 12] había observado la absorción de radiación UHF por materiales ferromagnéticos en 1911. Vale la pena indicar que muchos otros métodos experimentales únicamente permiten una medida relativa de la interacción ya que la energía asociada con la absorción de microondas permanece en el rango  $\mu K$ . La resonancia ferromagnética FMR es la técnica más apropiada para investigar las propiedades termodinámicas del estado fundamental y, además, ha demostrado que puede producir valores absolutos de cantidades físicas básicas tales como: energía anisotrópica magnética, el tensor  $g$  en los sólidos, temperatura de Curie, momento magnético total y, para el caso de sistemas multicapa como la válvula de espín, provee una me-

dida cuantitativa del acoplamiento magnético entre las capas ferromagnéticas.

El arreglo experimental de muchos espectrómetros de resonancia ferromagnética se muestra en la Fig. 2.4 (tomado de la Ref. [Liu 06]), en el cual se puede observar básicamente: el campo externo DC  $\vec{H}$  generado por los imanes, la muestra que para nuestro caso sería una válvula de espín y el campo de radiofrecuencia  $\vec{h}_{rf}$  generado en una fuente de microondas con el cual ocurrirá la resonancia. Una explicación detallada acerca de cómo ocurre la resonancia ferromagnética lo da C. Kittel en [Kittel 93], que a grandes razgos se puede entender como sigue: desde un punto de vista cuántico, al aplicar un campo externo  $\vec{H}$  a una muestra, los niveles del sistema cuantizado de momento electrónico son divididos por el efecto Zeeman, por lo que si hacemos incidir una radiación electromagnética cuya energía sea igual a la energía de transición entre dichos niveles cuantizados, entonces ocurrirá una absorción resonante tal como se puede apreciar en la Fig. 2.4(b); pero desde un punto de vista clásico, al aplicar un campo externo  $\vec{H}$  los momentos magnéticos de los átomos empiezan a precesar alrededor de cierto campo interno efectivo  $\vec{H}_{eff}$  con cierta frecuencia llamada frecuencia de Larmor  $\omega_L = \gamma H_{eff}$  y si se hace incidir una radiación electromagnética cuya frecuencia de oscilación  $f$  sea igual a la frecuencia de Larmor, entonces ocurrirá la resonancia. La teoría para la FMR ha sido desarrollado dentro de un marco

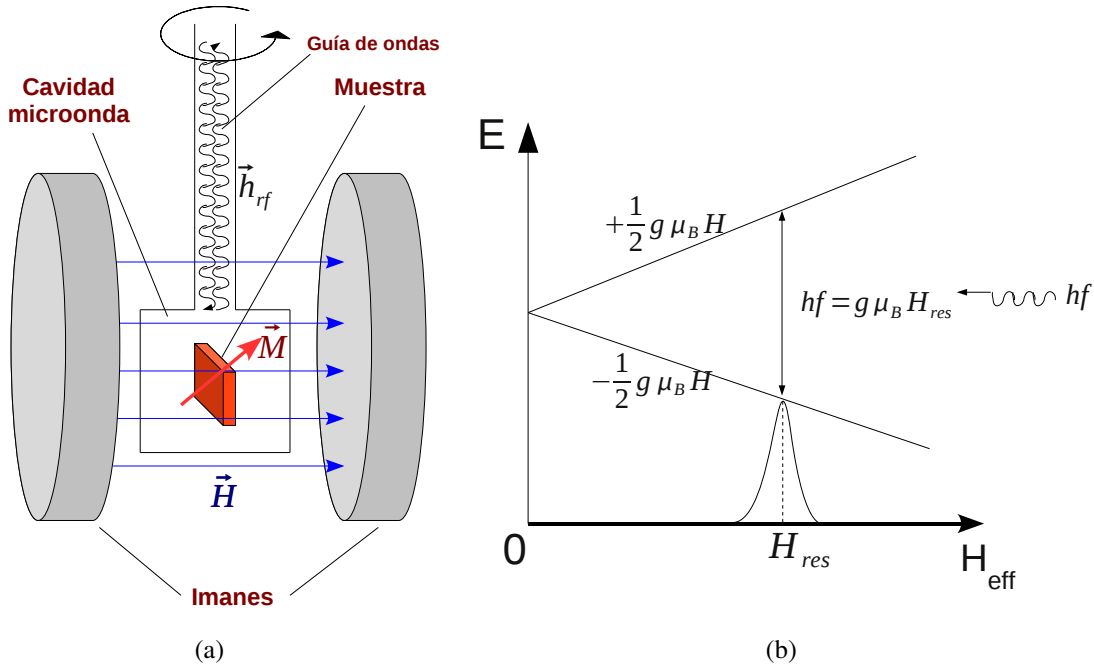


Figura 2.4: (a) Diagrama esquemático de un espectrómetro de resonancia ferromagnética donde  $\vec{h}_{rf}$  representa al campo de radiofrecuencia. (b) Absorción resonante magnética para el espín del electrón, donde  $h$  es la constante de Planck y  $f$  es la frecuencia de la radiación de microonda

clásico y mecánico cuántico, pero debido a que un gran número de espines toman parte en un experimento de resonancia, del orden de  $10^{10} - 10^{14}$ , ambas descripciones resultan ser equivalentes. Por tanto, es posible describir el fenómeno de resonancia aplicando una ecuación de movimiento macroscópico, para el comportamiento de la magnetización, el cual fue derivado primero por Landau y Lifshitz [Landau 65].

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma\vec{M} \times (\vec{H}_{eff} + \vec{H} + \vec{h}_{rf}) \quad (2.2)$$

La expresión sobre el lado derecho de la ecuación es el torque actuando sobre la magnetización  $\vec{M}$  el cual ha sido separado en partes provenientes del campo externo ( $\vec{H}$ ), el campo interno ( $\vec{H}_{eff}$ ) y el campo de alta frecuencia  $\vec{h}_{rf}$ , siendo  $\gamma = g\mu_B/\hbar$  la razón giromagnética. La ecuación para la magnetización puede resolverse por distintos métodos, uno de los cuales es el método de Smit y Beljers [Smit 55], quienes lo idearon para estudiar la absorción resonante ferromagnética en un cristal de  $BaFe_{12}O_{19}$ , donde demostraron que la ecuación de movimiento para la magnetización puede ser expresada en términos de la densidad de energía libre total  $E$  en lugar del campo efectivo total, este es el método que se seguirá en el presente trabajo, para ello el siguiente capítulo trata acerca de la energía libre total como la suma, principalmente, de dos contribuciones, la anisotropía magnética y la interacción de intercambio.





# Capítulo 3

## Breve revisión sobre las interacciones magnéticas

El magnetismo, uno de los fenómenos físicos más antiguos, fascinantes y misteriosos de la ciencia [Michael 00], ha llegado a ser en nuestros días un campo de investigación muy activo dentro de la comunidad científica debido tal vez al descubrimiento de que los sistemas nanoscópicos, como la válvula de espín, presentan propiedades totalmente distintas y únicas al de sus contrapartes macroscópicas o *bulk*. En este capítulo se presentará una visión panorámica sobre las interacciones magnéticas que tienen lugar en una válvula de espín y con ello las energías magnéticas provenientes de diferentes fuentes tales como la energía de: Zeeman, la anisotropía magnética, el acoplamiento de intercambio intercapa y el intercambio de sesgo (*exchange bias*), que se tomarán en cuenta en el establecimiento del modelo para la energía libre total para la resolución de la ecuación de magnetización de Landau-Lifshitz.

### 3.1. Energía de Zeeman

Hay un concepto fundamental el cual viene a ser la base para empezar el estudio del magnetismo en los materiales y se trata del momento magnético. Si consideramos un momento magnético dentro de un campo externo, la energía potencial magnética producto de la interacción viene dada por

$$E = -\mu_0 \vec{\mu} \cdot \vec{H}. \quad (3.1)$$

Ahora bien, si tomamos en cuenta un material finito el cual presenta muchos momentos magnéticos entonces el vector de magnetización viene a ser el momento magnético resultante por unidad de volumen  $\vec{M} = \sum_V \vec{\mu}/V$ , para un campo en general variable la energía de Zeeman por unidad de volumen, en una muestra finita, vendría expresada por

$$E_{Zeeman} = -\mu_0 \vec{M} \cdot \vec{H}, \quad (3.2)$$

la cual viene a ser la densidad de energía potencial de un cuerpo magnetizado  $\vec{M}$  en un campo magnético externo  $\vec{H}$ .

## 3.2. Anisotropía magnética

Se dice que las propiedades magnéticas de una sustancia o cuerpo presentan anisotropía cuando estas propiedades dependen de los ángulos entre un campo aplicado y ciertas direcciones preferenciales determinadas ya sea por la estructura cristalina, por la forma externa del material, el estrés en el material o segregación atómica, etc.[Guimarães 09]. Estas direcciones preferenciales o, llamadas también, direcciones fáciles de magnetización son direcciones estables en las cuales la energía alcanza un mínimo y si el vector de magnetización rota hacia otra dirección entonces esta energía se incrementa por lo que a este fenómeno se le llama energía anisotrópica magnética [Gurevich 96]. Las dos fuentes principales de la anisotropía magnética son la interacción dipolar magnética y la interacción espín - órbita [Johnson 96]. Al primero se le denomina anisotropía de forma y al segundo anisotropía magnetocristalina, a continuación se discutirá cada una de ellas.

### 3.2.1. Anisotropía de forma

Entre las importantes fuentes de anisotropía magnética en películas delgadas se encuentra la interacción dipolar magnética de largo alcance, la cual detecta los límites externos de la muestra, es decir, dicha anisotropía depende de la forma externa de la muestra estudiada, esto debido a que al aplicar un campo externo a una muestra finita, como con el caso eléctrico, ésta se polariza magnéticamente y por lo tanto aparece un campo llamado campo desmagnetizante  $\vec{H}_{demag}$  producido por  $\vec{M}$  [Jackson 98] tal como se ilustra en la figura 3.1. La energía de una muestra dada

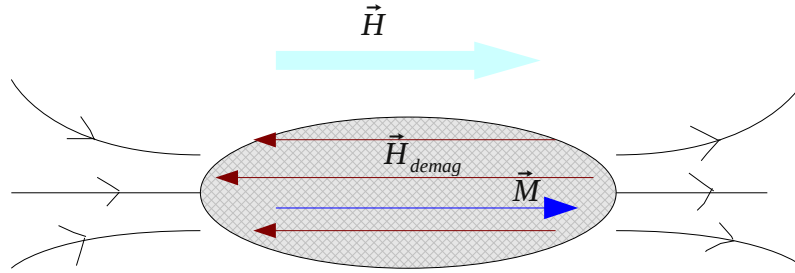


Figura 3.1: En este gráfico se muestra ilustrativamente la aparición de un campo desmagnetizante  $\vec{H}_{demag}$  como consecuencia de una distribución de dipolos magnéticos en los bordes de la muestra elipsoidal debido al campo externo  $\vec{H}$

asociada a su propio campo desmagnetizante viene dada por

$$E_{demag} = -\frac{\mu_0}{2} \int \vec{M} \cdot \vec{H}_{demag} dV. \quad (3.3)$$

Despreciando la naturaleza discreta de la materia, los efectos de forma de la interacción dipolar en una muestra de forma general llegan a ser muy complicados; sin embargo, para muestras con

simetría elipsoidal el cálculo es relativamente fácil y puede ser descrito, vía el campo desmagnetizante anisotrópico dado por  $\vec{H}_{demag} = -N_d \vec{M}$ . Donde  $N_d$  es el tensor desmagnetizante, que depende de los parámetros del elipsoide, cuyos valores para ciertos casos simples se muestran en la tabla 3.1. Para el caso de una película delgada  $N_d = 1$ , para una dirección perpendicular al

Tabla 3.1: Algunos valores para el factor desmagnetizante  $N_d$  (SI), tomado de [Guimarães 09]

Forma	Dirección	$N_d$
Plana (forma de película)	$\perp$	1
plana	$\parallel$	0
Cilindro( $l/d = 1$ )	$\parallel$	0.27
Cilindro( $l/d = 5$ )	$\parallel$	0.04
Cilindro largo	$\parallel$	0
Esfera	-	1/3

plano de la película, por tanto la densidad de energía magnetostática o energía de forma es

$$E_{demag} = \frac{1}{2} \mu_0 M_s^2 \cos^2 \theta \quad (3.4)$$

siendo  $M_s$  la magnetización de saturación y  $\theta$  el ángulo que subtiene el vector de magnetización con el eje normal a la película, como se puede observar en la figura 3.2. A partir de ésta, se puede deducir que para  $\theta = 90^\circ$  la energía toma un mínimo (véase la figura 3.2b) por ende el hecho de que la película tenga forma planar favorece un alineamiento, de la magnetización, paralelo al plano de la película.

### 3.2.2. Anisotropía magnetocristalina

La otra contribución a la energía anisotrópica magnética es la anisotropía magnetocristalina que tiene que ver con la dependencia de la magnetización con los ejes cristalográficos del material. El origen microscópico de la anisotropía magnetocristalina es la interacción espín-órbita tal como se dijo al inicio de la sección. En principio, también la interacción de intercambio y la interacción dipolar podrían contribuir a la anisotropía magnetocristalina, sin embargo, la interacción de intercambio es isotrópica y no depende de los ejes cristalográficos por lo que no puede contribuir a la energía. Por otro lado se observa que el orden de magnitud de la interacción dipolar para cristales cúbicos y cristales de baja simetría estructural es despreciable comparado a su valor real, consecuentemente, la interacción espín-órbita es el principal responsable de la anisotropía magnetocristalina en cristales de Fe, Ni y Co [Johnson 96].

La interacción espín-órbita puede ser calculada desde primeros principios, sin embargo debido a la dificultad de realizar estos cálculos se opta por otra alternativa más sencilla y no menos eficaz. Este método consiste en usar expresiones fenomenológicas donde, con ayuda del experimento,

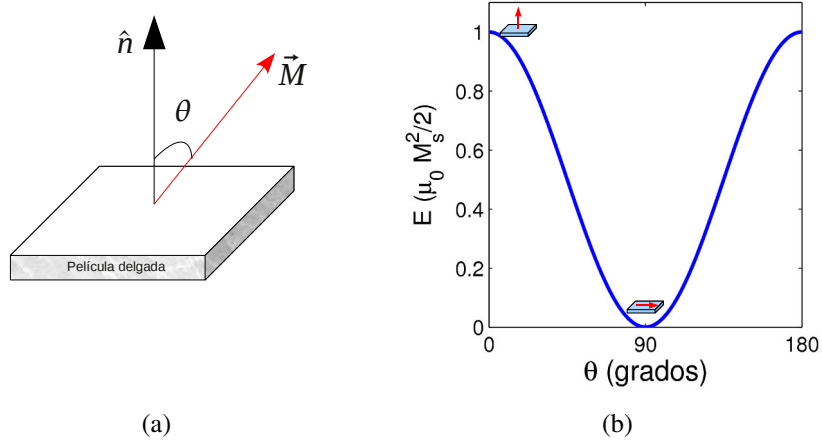


Figura 3.2: (a) Representación esquemática de una película delgada donde  $\hat{n}$  es la normal al plano,  $\vec{M}$  es el vector magnetización y (b) la curva de energía en función de  $\theta$  (véase la ec. 3.4).

se obtienen parámetros que se usan en los cálculos. En el caso de la energía magnetocristalina, dicha expresión fenomenológica es una expansión en series de potencia de la dirección de la magnetización que toma en cuenta la simetría cristalina del material, obteniendo del experimento los coeficientes para dicha expansión [Getzlaff 08], que en forma general vienen dados por

$$E = E_0 + \sum_i b_i \alpha_i + \sum_{ij} b_{ij} \alpha_i \alpha_j + \sum_{ijk} b_{ijk} \alpha_i \alpha_j \alpha_k + \sum_{ijkl} b_{ijkl} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l + O(\alpha^5). \quad (3.5)$$

La expresión fenomenológica convencional para la densidad de energía magnetocristalina con una dirección uniaxial, como es el caso para estructuras cristalinas hcp (véase la Fig. 3.3a) y tetragonales, viene dada por

$$E_{an}(\theta, \phi) = K_1 \sin^2 \theta + K_2 \sin^4 \theta + K_3 \sin^4 \theta \cos^4 \phi + \dots \quad (3.6)$$

donde  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  son las constantes anisotrópicas y la dirección de la magnetización espontánea  $\vec{M}$  relativa al eje fácil está dada por los ángulos polar  $\theta$  y azimutal  $\phi$ , siendo la dirección [0001] el de fácil magnetización (eje uniaxial, véase la Fig. 3.3a). Sin embargo, se ha demostrado por experiencia que son suficientes las constantes  $K_1$  y  $K_2$  para producir un buen acuerdo entre el experimento y los cálculos [Getzlaff 08]. Además, cabe mencionar que en el presente trabajo solo fue necesario considerar el primer término de la Ec. 3.6 para lograr un buen acuerdo con los datos experimentales, por lo que la energía magnetocristalina se redujo a

$$E_{an} = K_1 \sin^2 \theta. \quad (3.7)$$

Si  $K_1$  es positivo, esta energía magnetocristalina ( $E_{an}$ ) toma un mínimo cuando  $\sin \theta = 0$ , eso ocurre cuando la magnetización apunta en la dirección [0001] ya sea con  $\theta = 0^\circ$  o  $\theta = 180^\circ$  como se puede apreciar en las curvas de nivel de energía mostrada en la Fig. 3.3b.

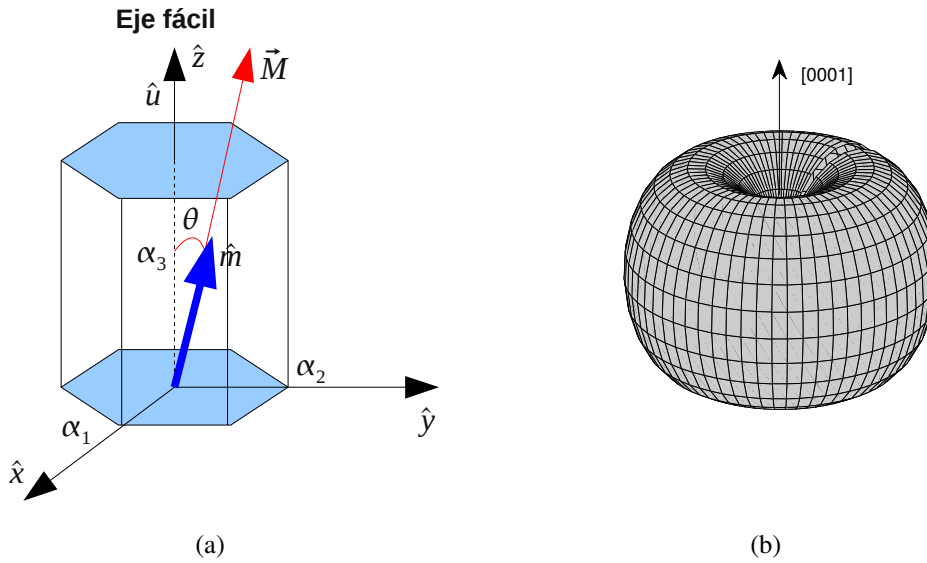


Figura 3.3: (a) Representación de la celda unitaria de una estructura hcp con el eje fácil a lo largo de la dirección  $[0001]$  y (b) superficie de energía magnetocristalina para  $K_1 > 0$  en el que se observa claramente la simetría uniaxial

### 3.3. Acoplamiento de intercambio intercapa

Un fenómeno muy interesante ocurre cuando dos capas ferromagnéticas se encuentran separadas por una capa espaciadora no magnética como se muestra ilustrativamente en la figura 3.4.

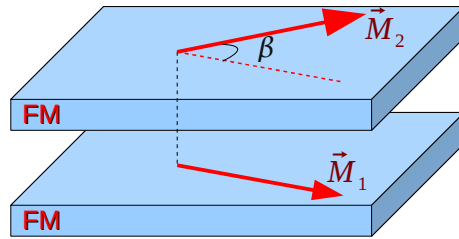


Figura 3.4: Representación esquemática del acople magnético que existe entre dos capas ferromagnéticas (FM) separadas por una capa NM que se manifiesta en una orientación relativa, dada por el ángulo  $\beta$ , entre las magnetizaciones.

Las primeras observaciones [Baibich 88],[Binash 89] indicaban que en ausencia de un campo magnético externo una medida de la magnetorresistencia resultaba mucho mayor en comparación a una medida realizada en presencia de un campo externo, era tan grande la diferencia en comparación a la magnetorresistencia ya conocida que se le llegó a llamar magnetorresistencia gigante. Este fenómeno se adjudicó al hecho que las capas ferromagnéticas se encontraban acopladas

magnéticamente a través del espaciador no magnético, al inicio se pensó que este acoplamiento solo hacía que las magnetización se alínien entre sí de forma paralela o antiparalela como se muestra ilustrativamente en la figura 3.5, llamándose a este tipo de acoplamiento acoplamiento bilineal, dependiente del espesor del espaciador no magnético de forma oscilatoria [Parkin 90]. Sin embargo, luego se descubrió en ciertas tricapas de Fe/Cr/Fe [Grünberg 91] que era necesario añadir otro tipo de acoplamiento no colineal para lograr un buen acuerdo entre el experimento y la teoría, a este tipo de acoplamiento se le llamó acoplamiento bicuadrático en el que las magnetizaciones tendían a alinearse de forma perpendicular. Estos dos tipos de acoplamiento se discutirá a continuación.

### 3.3.1. Acoplamiento bilineal

Se denomina acoplamiento bilineal a la configuración en el que las magnetizaciones de la capa libre FM1 y la capa fijada FM2 se encuentran paralelas o antiparalelas tal como se indica en la figura 3.5. Históricamente, luego del descubrimiento del acoplamiento antiferromagnético hecho en 1986 [Grünberg 86], se teorizó que este tipo de acoplamiento se debía a una interacción de tipo Heisenberg, esta asunción produjo buenos acuerdos entre los resultados teóricos y los datos experimentales, por lo que la energía del acoplamiento de intercambio intercapa por unidad de área ( $E_{inter}$ ) entre dos capas ferromagnéticas FM1-FM2 y que está en función del espesor de la capa NM ( $t_{NM}$ ), quedó expresada de modo fenomenológico [Grünberg 91] como

$$E_{inter} = -J_{bl} \cos \beta, \quad (3.8)$$

donde  $J_{bl}$  es conocido como la constante -factor o fuerza- de acoplamiento bilineal y  $\cos \beta = \frac{\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2}{|\vec{M}_1| |\vec{M}_2|}$ , siendo  $\beta$  la orientación relativa entre las magnetizaciones de las dos capas ferromagnéticas (véase la fig. 3.5). Desde un punto de vista teórico existen varios modelos que intentan

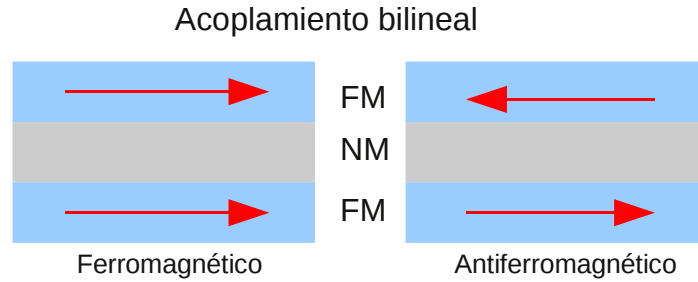


Figura 3.5: Representación esquemática de un acoplamiento bilineal en el que las magnetizaciones se alinean de forma paralela (acople ferromagnético) o antiparalela (acople antiferromagnético)

explicar el efecto del acoplamiento de intercambio intercapa, estos son: el modelo de RKKY [Bruno 91], el del confinamiento cuántico [Edward 91], del electrón libre [Cullen 92] y de la

interfaz de reflexión [Bruno 93], [Bruno 95] los cuales concuerdan, en cierta medida, en la naturaleza y periodo oscilatorio de este tipo de acoplamiento. Sin embargo, a continuación solo se discutirá el modelo de RKKY y del confinamiento cuántico debido a sus usos extensos y buen acuerdo con los experimentos.

### Modelo del acoplamiento RKKY

El modelo teórico original de Ruderman y Kittel [Ruderman 54], el cual trata sobre la interacción entre espines nucleares de átomos vecinos vía los electrones de conducción, fue extendida por Kasuya [Kasuya 56] y Yosida [Yosida 57] para explicar la interacción entre momentos magnéticos localizados, que no interactúan directamente y que están inmersas en una matriz no magnética, a través de los electrones de conducción de dicha matriz quienes actúan como mediadores para la existencia del acoplamiento entre dichos momentos magnéticos; este tipo de interacción pronto fue llamada interacción RKKY cuya característica era su naturaleza oscilatoria que decaía de la forma  $1/D^3$ , donde  $D$  es la distancia entre los momentos magnéticos. Luego, con el descubrimiento del acoplamiento antiferromagnético en multicapas de metales de transición [Grünberg 86] y en heteroestructuras tierras-raras/Y [Majkrzak 86] junto con el descubrimiento de la naturaleza oscilatoria de este tipo de acoplamiento [Parkin 90], se pensó que la interacción de intercambio intercapa y la interacción RKKY tenían un mecanismo en común debido a sus naturalezas oscilatorias. Esta observación trajo consigo una serie de investigaciones teóricas al respecto; fue Yafet [Yafet 87] el primero en extender el modelo de RKKY al estudio del acoplamiento de intercambio intercapa. En su modelo, Yafet consideró a las magnetizaciones de las capas ferromagnéticas FM como momentos magnéticos localizados, inmersas en una matriz no magnética, donde las magnetizaciones interactúan vía los electrones de conducción de los espaciadores no magnéticos, lo cual trajo como resultado que el acoplamiento, en el límite de  $t_{NM} \rightarrow \infty$ , tome la forma de un decaimiento tipo  $1/t_{NM}^2$  como se muestra en la siguiente ecuación:

$$J_{bl} \propto \frac{\sin(2k_F t_{NM})}{t_{NM}^2}, \quad (3.9)$$

donde  $k_F$  es el vector de onda de Fermi y  $t_{NM}$  el espesor de la capa no magnética NM. Este tipo de comportamiento oscilatorio se puede observar en la figura 3.6, en donde se puede apreciar que, dependiendo del espesor, la fuerza de acoplamiento  $J_{bl}$  pasa de tomar valores negativos (acople antiferromagnético) a positivos (acople ferromagnético) de manera oscilatoria.

Sin embargo, el modelo RKKY no permitió dar una descripción cuantitativa de la amplitud y de la fase de las oscilaciones del factor -o fuerza- de acoplamiento  $J_{bl}$  por lo que aparecieron nuevos modelos con mecanismos un poco diferentes como es el caso de la pared o confinamiento cuántico que se discutirá a continuación.

### Modelo de la pared cuántica

Este modelo fue propuesto por Edwards et. al. [Edward 91], que aparentemente tenía un mecanismo diferente al del modelo RKKY, ellos atribuyeron el efecto del acoplamiento como una consecuencia del confinamiento dependiente del espín de los electrones en una pared cuántica

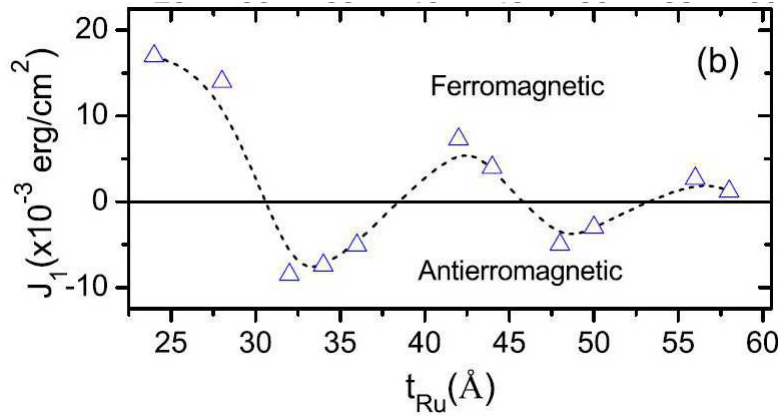


Figura 3.6: Comportamiento oscilatorio del acoplamiento de intercambio intercapa bilineal en el sistema de válvula de espín Si/Ru(150 Å)/IrMn(150 Å)/Co(50 Å)/Ru( $t_{Ru}$ )/Py(50 Å)/Ru(50 Å) (Tomado de [Alayo 09]).

producida por la capa espaciadora no magnética. Sabemos que las funciones de onda pueden ser transmitidos o reflejados en una interface FM/NM, ya que la capa NM actúa como una barrera de potencial, dependiente del grado de coincidencia de las bandas del electrón en el nivel de Fermi. Si consideramos el caso más simple en el que una onda unidimensional se propaga con perfecta coincidencia de la banda de espín mayoritaria de la capa FM y de la capa NM, además de considerar una larga separación de intercambio de la capa FM, las consecuencias de estas suposiciones es un confinamiento total de la banda de espín minoritario dentro de la capa espaciadora NM. Luego de hacer un cálculo de  $J(t_{NM})$  y comparando la diferencia de energía entre el alineamiento paralelo y antiparalelo, resulta que el modelo de la pared cuántica produce resultados similares al modelo RKKY, mostrándose notable que la tasa de decaimiento de  $J_{bl}$  es proporcional a  $1/t_{NM}^2$ . Vale la pena mencionar que Bruno [Bruno 93] planteó un cuadro unificado acerca de los dos modelos, tratando el acoplamiento de intercambio intercapa como una interferencia de funciones de onda viajando en diferentes direcciones. El mostró que mientras el modelo RKKY es el caso extremo de reflexión débil en los contornos, el modelo de la pared cuántica, del total confinamiento, es el límite de la reflexión fuerte.

Para información más detallada de este tipo de acoplamiento bilineal; el artículo de Stiles [Stiles 99] realiza una comparación entre la teoría y la parte experimental mientras que para una revisión completa los siguientes textos sirven para dicho propósito [Bland 94], [Kübler 00], [Bruno 02].

### 3.3.2. Acoplamiento bicuadrático

De los dos distintos estados de alineación (paralela o antiparalela) de las magnetizaciones de las capas ferromagnéticas FM1 y FM2 discutidas en la sección precedente, existe otra forma de alineación entre las magnetizaciones la cual fue descubierta en las curvas de magnetización



de multicapas de Fe/Cr/Fe [Grünberg 91]. Estudios experimentales más detallados hechos por Ruehrig et. al [Ruehrig 91] sobre este mismo sistema, indicaron la existencia de una simetría cuádruple en los patrones de los dominios magnéticos de las capas FM, indicando cuatro direcciones fáciles de magnetización mutuamente perpendiculares, por lo que él y su equipo introdujeron una expresión fenomenológica adicional para el acoplamiento de intercambio no colineal que con el tiempo la energía de intercambio intercapa (véase la ec. 3.8) quedó expresada como

$$E_{inter} = -J_{bl}(m_1 \cdot m_2) - J_{bc}(m_1 \cdot m_2)^2, \quad (3.10)$$

donde  $J_{bc}$  es conocido como factor -fuerza o constante- de acoplamiento bicuadrático,  $m_1$  y  $m_2$  son los vectores unitarios de los vectores de magnetización de las capas FM. Este término adicional llamado acoplamiento bicuadrático trajo como consecuencia el establecimiento de un diagrama de fases tal como lo muestra Demokritov en su artículo [Demokritov 98], donde dos fases corresponden a un alineamiento colineal (acoplamiento bilineal) y dos fases a un alineamiento no colineal (acoplamiento bicuadrático) tal como se indica en la figura 3.7; en ella se observa algo interesante, existe alineamiento perpendicular (de  $90^\circ$ ) sólo si el factor de acoplamiento bicuadrático es negativo ( $J_{bc} < 0$ ), esto será de suma importancia para el análisis de nuestros resultados que se discutirá en el capítulo 5.

Por el lado de la teoría, mientras la naturaleza intrínseca del espaciador ha sido correctamente empleado para explicar el acoplamiento bilineal, este no fue el caso para el acoplamiento bicuadrático ya que los cálculos realizados sobre asunciones intrínsecas producían valores mucho más pequeños de  $J_{bc}$  comparado al de los resultados experimentales. Estos efectos han conducido a intentar explicar el acoplamiento bicuadrático bajo efectos extrínsecos [Slonc 95].

### 3.4. Intercambio de sesgo (*Exchange bias*)

Otro fenómeno muy interesante presente en la válvula de espín que aún, a pesar de los esfuerzos realizados por establecer una teoría completa, sigue en discusión abierta sucede al poner en contacto una capa ferromagnética con una capa antiferromagnética y da como resultado un corrimiento de la curva de histéresis a lo largo del eje del campo magnético externo como se muestra en la figura 3.8. Este fenómeno fue observado por primera vez en 1956 por Meiklejohn y Bean [Meiklejohn 56], [Meiklejohn 57] en nanopartículas de Co quienes describieron a este fenómeno como ‘*Un nuevo tipo de anisotropía magnética ... el cual es descrito muy bien como una anisotropía de intercambio*’\*. Desde entonces se han desarrollado diversas teorías al respecto, Berkowitz et al. [Berkowitz 99] y Stamps [Stamps 00] dan una revisión completa y detallada de los modelos teóricos sobre el exchange bias. Entre los trabajos teóricos más importantes que ellos destacan están: el modelo de intercambio directo [Meiklejohn 56], el de paredes de dominio [Mauri 87], y el de la rugosidad en la interface [Malozemoff 88] las cuales se discutirán líneas abajo.

---

\*Traducción del original “A new type of magnetic anisotropy has been discovered which is best described as an exchange anisotropy. This anisotropy is the result of an interaction between an antiferromagnetic material and a ferromagnetic material”.

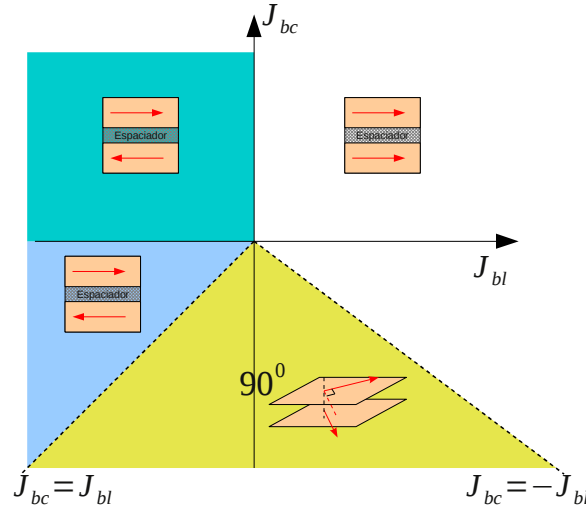


Figura 3.7: Diagrama de fase de los factores de acoplamiento  $J_{bl}$  (bilineal) y  $J_{bc}$  (bicuadrático) en ausencia de campo externo, basado en el esquema de la ref. [Demokritov 98]. Las regiones coloreadas con diferentes colores indican las diferentes fases.

### 3.4.1. Modelo de Meiklejohn y Bean

El modelo más simple que intenta explicar el intercambio de sesgo fue ideada por Meiklejohn y Bean, quienes consideraron que los momentos magnéticos del material ferromagnético rotan coherentemente mientras los momentos del material antiferromagnético permanecen invariables a lo largo de una dirección llamada anisotropía unidireccional. Por ello, a este modelo se le llama modelo del antiferromagneto rígido. En este modelo la energía de intercambio viene dada por

$$E_{ex} = -J \cos \beta, \quad (3.11)$$

donde  $J$  es el acoplamiento de intercapa entre la capa ferromagnética y la antiferromagnética,  $\beta$  es el ángulo entre la magnetización de la capa ferromagnética y la dirección unidireccional  $\hat{u}$ .

El campo de *exchange bias*  $H_E$  (véase la Fig. 3.8), es el campo a mitad entre los campos coercitivos  $H_{c1}$  y  $H_{c2}$  que se obtienen luego del corrimiento de la curva de histéresis, y es proporcional al factor de acoplamiento  $J$ ; es decir,

$$H_E = -\frac{J}{Mt},$$

donde  $M$  es el módulo de la magnetización y  $t$  es el espesor de la capa ferromagnética en contacto atómico con la capa antiferromagnética.

No obstante, los resultados teóricos del campo  $H_E$  resultaron ser varios órdenes de magnitud más alto que los obtenidos experimentalmente por lo que este modelo sencillo no resultó ser suficiente para utilizarlo en los análisis. Otro modelo que corrige el modelo de Meiklejohn y Bean y que produce resultados acorde con los datos experimentales fue el modelo propuesto por Mauri et. al [Mauri 87] que se discutirá continuación.

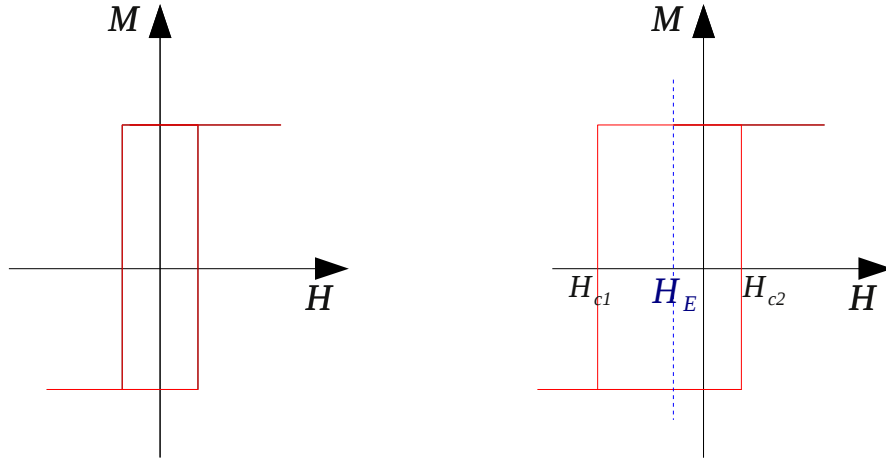


Figura 3.8: Corrimiento de la curva de histéresis producto de una interacción de intercambio directo entre un material ferromagnético y otro antiferromagnético.

### 3.4.2. Modelo de la pared de dominio antiferromagnético de Mauri

Por el mismo tiempo Mauri *et. al.* propusieron un modelo el cual corrige el orden de magnitud del problema del modelo de Meiklejohn y Bean. Ellos hicieron las siguientes suposiciones:

- 1 En la interface FM/AFM se forma una pared de dominio planar.
- 2 El espesor de la capa antiferromagnética AFM se considera infinitamente grande (sin restricciones para la formación de la pared de dominio AFM debido a su espesor).
- 3 Los momentos magnéticos dentro de la capa ferromagnética FM rotan coherentemente (para el caso de un espesor de la capa FM menor que el espesor de la pared de dominio)

De acuerdo con estos puntos, hay dos contribuciones a la energía de *Exchange bias*: (1) una energía debido a la formación de una pared de dominio AFM,  $\sigma_W(1 - (\vec{M}_{AFM} \cdot \hat{u})/M_{AFM})$  que depende de la orientación relativa entre la magnetización de una subred antiferromagnética  $\vec{M}_{AFM}$  y la dirección unidireccional  $\hat{u}$ . Esto significa que un momento magnético neto en la capa AFM rota al revertirse la magnetización de la capa FM; (2) una energía de anisotropía entre la capa FM y AFM dada por  $-J_E(\vec{M} \cdot \vec{M}_{AFM})/M M_{AFM}$ , que está en función del ángulo relativo entre la magnetización de la capa FM y una subred AFM. Así la energía debido a la interacción entre la capa FM y AFM se puede escribir como:

$$E_{Ex} = -J_E \frac{\vec{M} \cdot \vec{M}_{AFM}}{M M_{AFM}} + \sigma_W \left( 1 - \frac{\vec{M}_{AFM} \cdot \hat{u}}{M_{AFM}} \right), \quad (3.12)$$

donde el factor de acoplamiento  $J_E$  está asociado al campo de *exchange bias*  $H_E$  a través de:  $H_E = J_E/(Mt)$ , donde  $t$  es el espesor de la capa FM. En el segundo término  $\sigma_W = 2\sqrt{A_{AF}K_{AF}}$

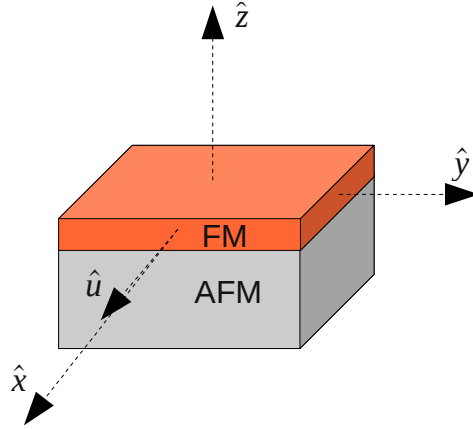


Figura 3.9: Representación esquemática de una capa FM y otra AFM en contacto atómico, en el que se da el fenómeno de “*Exchange bias*” donde  $\hat{u}$  es el eje de anisotropía unidireccional que coincide con el eje uniaxial de la capa FM. Esta disposición está acorde con nuestro sistema de referencia de la figura 2.1.

es la energía por unidad de superficie de una pared de dominio de  $90^\circ$  [Azevedo 05] en la capa AFM y está asociado a un campo de pared de dominio  $H_W = \sigma_W / (Mt)$ . Para determinar la relación de dispersión se puede trabajar sólo con las derivadas de la energía libre total, entonces la ec. 3.12 se simplifica como

$$E_{Ex} = -J_E \frac{\vec{M} \cdot \vec{M}_{AFM}}{M M_{AFM}} - \sigma_W \frac{\vec{M}_{AFM} \cdot \hat{u}}{M_{AFM}}. \quad (3.13)$$

Para el caso de la válvula de espín mostrada en la figura 2.1, la capa ferromagnética en contacto atómico con la capa antiferromagnética vendría a ser FM2 con un vector de magnetización  $\vec{M}_2$  y un espesor  $t_2$ , y para la capa antiferromagnética  $\vec{M}_3$  sería la magnetización de una subred antiferromagnética. Reemplazando todo esto en la ec. 3.13 obtenemos:

$$E_{Ex} = -J_E \frac{\vec{M}_2 \cdot \vec{M}_3}{M_2 M_3} - \sigma_W \frac{\vec{M}_3 \cdot \hat{u}}{M_3}, \quad (3.14)$$

que viene a ser la energía asociada al *exchange bias*.

# Capítulo 4

## Modelo fenomenológico

En el capítulo anterior se han mostrado los diferentes fenómenos magnéticos que ocurren dentro de una válvula de espín y las teorías que giran en torno a ellas contribuyendo a la comprensión y, por ende, a la aplicabilidad tecnológica de este tipo de sistemas. También se dieron a conocer expresiones fenomenológicas para la energía magnetocristalina, la energía proveniente del acoplamiento de intercambio intercapa y la energía del intercambio de sesgo o comúnmente llamada *exchange bias*. Todos estos términos contribuyen a la energía libre de Helmholtz total de dicha estructura. Así es posible obtener la relación de dispersión del sistema.

Por tanto, en el presente capítulo se tiene como propósito determinar la dependencia angular del campo de resonancia que se obtendrá a partir de la relación de dispersión. Para ello, se hace uso la energía libre de Helmholtz para resolver la ecuación de Landau-Lifshitz [Landau 65], que rige la dinámica de la magnetización de las capas ferromagnéticas. Así se podrán estudiar y analizar los datos experimentales de la resonancia ferromagnética.

### 4.1. El sistema de estudio

El sistema que se estudia en este trabajo se muestra ilustrativamente en la figura 4.1a, tal como se indicó en la sección 2.1, este sistema consiste de dos capas ferromagnéticas FM1 y FM2, el espaciador no magnético NM y la capa antiferromagnética AFM. Además, asumimos que todas las capas permanecen en el plano x-y, como se indica en el sistema de referencia adjunto (véase la figura 4.1b). Aquí  $\vec{M}_1$  y  $\vec{M}_2$  son los vectores de magnetización de las capas FM1 y FM2, respectivamente,  $\vec{M}_3$  es la magnetización de una subred de la capa antiferromagnética AFM (que está en contacto atómico con FM2),  $\vec{H}$  es el campo externo aplicado paralelo al plano de las capas y  $\hat{u}$  es la dirección de anisotropía uniaxial para ambas capas FM1 y FM2, a lo largo del eje x.

De acuerdo con estas asunciones dichos vectores quedarían expresados de la siguiente manera:

$$\vec{M}_1 = M_1(\sin \theta_1 \cos \phi_1 \hat{x} + \sin \theta_1 \sin \phi_1 \hat{y} + \cos \theta_1 \hat{z}) \quad (4.1a)$$

$$\vec{M}_2 = M_2(\sin \theta_2 \cos \phi_2 \hat{x} + \sin \theta_2 \sin \phi_2 \hat{y} + \cos \theta_2 \hat{z}) \quad (4.1b)$$

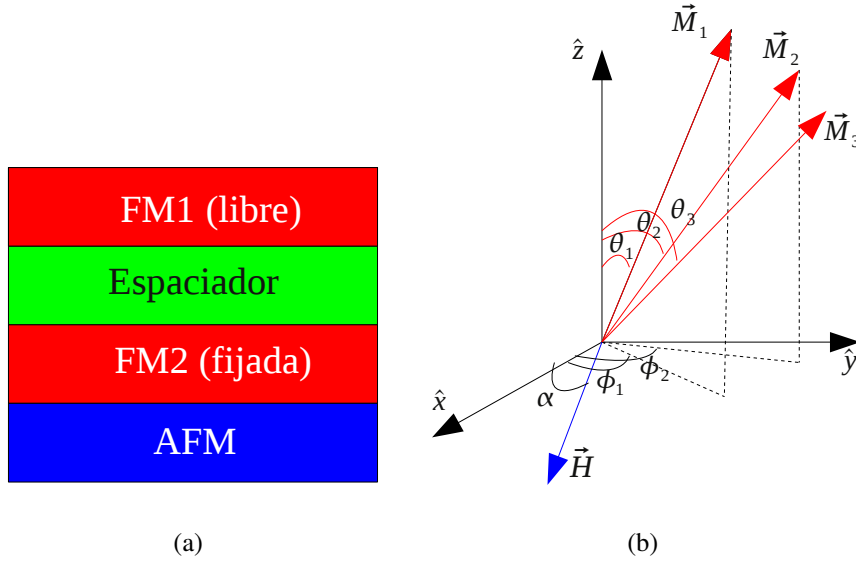


Figura 4.1: a) Diagrama esquemático de una válvula de espín. b) Sistema de coordenadas usado en el presente trabajo.

$$\vec{M}_3 = M_3(\sin \theta_3 \cos \phi_3 \hat{x} + \sin \theta_3 \sin \phi_3 \hat{y} + \cos \theta_3 \hat{z}) \quad (4.1c)$$

$$\vec{H} = H(\cos \alpha \hat{x} + \sin \alpha \hat{y}) \quad (4.1d)$$

## 4.2. Densidad de energía libre total

Si al sistema tipo válvula de espín, descrito en la figura 4.1a, se le hace interactuar con un campo magnético externo  $\vec{H}$ , la densidad de energía libre de Helmholtz total por unidad de superficie del sistema viene dada por

$$E_{total} = E_{Zee} + E_{form} + E_{anis} + E_{ex} + E_{acopl}, \quad (4.2)$$

donde el primer término,  $E_{Zee}$ , representa la densidad de energía potencial de interacción entre la magnetización y el campo externo; es conocido como energía de Zeeman (discutido en la sección 3.1). Así, a partir de la cual (Ec.3.2) se encuentra una expresión para las capas ferromagnéticas; es decir,

$$E_{Zee} = -t_1 \vec{M}_1 \cdot \vec{H} - t_2 \vec{M}_2 \cdot \vec{H}, \quad (4.3)$$

siendo  $t_1$  y  $t_2$  los espesores de las capas FM1 y FM2, respectivamente. El segundo término es la contribución de la energía de forma discutida en la sección 3.2.1. Así, a partir de la Ec. 3.4, se

obtiene la contribución a la energía libre de las capas ferromagnéticas FM1 y FM2; es decir,

$$E_{form} = 2\pi t_1(\vec{M}_1 \cdot \hat{n})^2 + 2\pi t_2(\vec{M}_2 \cdot \hat{n})^2, \quad (4.4)$$

siendo  $\hat{n}$  la normal al plano de las capas. El tercer término,  $E_{anis}$ , es la contribución de la anisotropía magnetocristalina *in-plane* (en el plano) y alguna posible anisotropía *out-plane* (perpendicular al plano) de las capas FM1 y FM2 a la energía libre total. Así considerado el primer término de la Ec. 3.6 se tiene

$$\begin{aligned} E_{anis} = & -K_{u1}t_1 \left( \frac{\vec{M}_1 \cdot \hat{u}}{M_1} \right)^2 - K_{u2}t_2 \left( \frac{\vec{M}_2 \cdot \hat{u}}{M_2} \right)^2 \\ & - K_{u1}^{out}t_1 \left( \frac{\vec{M}_1 \cdot \hat{n}}{M_1} \right)^2 - K_{u2}^{out}t_2 \left( \frac{\vec{M}_2 \cdot \hat{n}}{M_2} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde  $K_{u1}, K_{u2}$  y  $K_{u1}^{out}, K_{u2}^{out}$  son las constantes de anisotropía magnetocristalina uniaxial *in-plane* y *out-plane* para las capas FM1 y FM2, respectivamente. Si reemplazamos  $M_1, M_2$  de la Ec. 4.1 y considerando que  $\hat{u} = \hat{x}$  y  $\hat{n} = \hat{z}$  entonces obtenemos

$$\begin{aligned} E_{anis} = & -\frac{H_{u1}M_1t_1}{2} \sin^2 \theta_1 \cos^2 \phi_1 - \frac{H_{u2}M_2t_2}{2} \sin^2 \theta_2 \cos^2 \phi_2 \\ & - \frac{H_{u1}^{out}M_1t_1}{2} \cos^2 \theta_1 - \frac{H_{u2}^{out}M_2t_2}{2} \cos^2 \theta_2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde hemos definido como  $H_{u1} = 2K_{u1}/M_1$ ,  $H_{u2} = 2K_{u2}/M_2$  y  $H_{u1}^{out} = 2K_{u1}^{out}/M_1$ ,  $H_{u2}^{out} = 2K_{u2}^{out}/M_2$  a los campos de anisotropía uniaxial *in-plane* y *out-plane*, respectivamente.

El cuarto término,  $E_{ex}$ , en la Ec. 4.2 viene a ser la contribución a la energía del intercambio de sesgo (*exchange bias*) que se da en la interface AFM-FM2, y viene dada por

$$E_{ex} = -\frac{J_E \vec{M}_2 \cdot \vec{M}_3}{M_2 M_3} - \sigma_W \frac{\vec{M}_3 \cdot \hat{u}}{M_3}, \quad (4.7)$$

Esta expresión es la contribución a la energía del intercambio de sesgo (*exchange bias*), modelo planteado por Mauri et. al. [Mauri 87], donde  $J_E$  es la constante de *exchange bias* efectiva y  $\hat{u}$  es la dirección de fácil magnetización de la capa AFM (los momentos que rotan rígidamente con FM2); tal que  $H_E = J_E/M_2 t_2$  representa al campo de *exchange bias* y el segundo término representa la energía de la pared de dominio planar, donde  $\vec{M}_3$  es la dirección de magnetización de una subred en la capa antiferromagnética, como se mencionó líneas arriba.  $\sigma_W$  es la energía de intercambio por unidad de superficie de una pared de dominio de  $90^\circ$  en la capa AFM [Geshev01], con  $H_W = \sigma_W/M_2 t_2$  el campo de pared de dominio efectivo.

El quinto y último término en la Ec. 4.2, tratado en la sección 3.3, representa la energía del acoplamiento de intercambio intercapa entre las capas ferromagnéticas FM2 y FM1, contribuyendo

ya sea con una alineación bilineal o bicuadrática de FM1 y FM2, cuya expresión fenomenológica, dada en la Ec. 3.8, viene expresada de la siguiente manera

$$E_{acopl} = -J_{bl}\left(\frac{\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2}{M_1 M_2}\right) - J_{bc}\left(\frac{\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2}{M_1 M_2}\right)^2, \quad (4.8)$$

aquí  $J_{bl}$  y  $J_{bc}$  son las constantes de acoplamiento bilineal y bicuadrática, entre las capas ferromagnéticas, respectivamente.

Ahora bien, teniendo en cuenta el sistema coordenado propuesto en el gráfico de la figura 4.1b, donde se considera que el campo aplicado externo  $H$  es paralelo al plano de las capas y que  $\vec{M}_3$  es la dirección de magnetización de una subred de la capa antiferromagnética AFM, se reemplaza  $\vec{M}_1$ ,  $\vec{M}_2$ ,  $\vec{M}_3$  y  $\vec{H}$ , de acuerdo a la Ec.4.1, en cada una de las expresiones de la Ec. 4.2. Así se obtiene finalmente la **densidad de energía libre de Helmholtz** que viene expresada tal como sigue

$$\begin{aligned} E = & t_1 \left[ -M_1 H \sin \theta_1 \cos(\alpha - \phi_1) + (2\pi M_1^2 - K_{u1}^{out}) \cos^2 \theta_1 - \frac{M_1 H_{u1}}{2} \sin^2 \theta_1 \cos^2 \phi_1 \right] \\ & + t_2 \left[ -M_2 H \sin \theta_2 \cos(\alpha - \phi_2) + (2\pi M_2^2 - K_{u2}^{out}) \cos^2 \theta_2 - \frac{M_2 H_{u2}}{2} \sin^2 \theta_2 \cos^2 \phi_2 \right. \\ & \quad \left. - M_2 H_E (\sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\phi_2 - \phi_3) + \cos \theta_2 \cos \theta_3) - M_2 H_W \sin \theta_3 \cos \phi_3 \right] \\ & \quad - J_{bl} \left[ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right] \\ & \quad - J_{bc} \left[ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right]^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$



### 4.2.1. Minimización de la energía

Para estudiar pequeñas oscilaciones de la magnetización en la resonancia ferromagnética, lo primero que tenemos que determinar es el estado estacionario; es decir, el estado de equilibrio de la magnetización y eso se logra minimizando la energía libre obtenida líneas arriba ( véase la Ec. (4.9)) a partir de la cual podemos obtener las ecuaciones de equilibrio, las cuales provienen de la aplicación del principio de minimización de la energía que clama así: “*todo sistema termodinámico evoluciona hacia un estado de mínima energía*”. En este caso, la función energía libre  $E$ , depende de seis variables independientes:  $\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \theta_3, \phi_3$ . Así, si graficamos  $E$  en un hiperespacio de 7-dimensiones (1-dimensión correspondiente a  $E$  y las 6 restantes correspondientes a los ángulos ya mencionados), el estado de mínima energía será un punto  $P^0 = (\theta_1^0, \phi_1^0, \theta_2^0, \phi_2^0, \theta_3^0, \phi_3^0)$  del hiperespacio en el que la hipersuperficie  $E(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \theta_3, \phi_3)$  tiene un mínimo, situación que matemáticamente puede expresarse como

$$\nabla E_{P^0} \cdot d\vec{\zeta} = 0 \quad (4.10)$$

donde  $d\vec{\zeta}$  es el vector unitario en el espacio 6-dimensional, que resulta ser equivalente a:

$$\left( \frac{\partial E}{\partial \theta_1} \vec{\zeta}_{\theta_1} + \frac{\partial E}{\partial \phi_1} \vec{\zeta}_{\phi_1} + \frac{\partial E}{\partial \theta_2} \vec{\zeta}_{\theta_2} + \frac{\partial E}{\partial \phi_2} \vec{\zeta}_{\phi_2} + \frac{\partial E}{\partial \theta_3} \vec{\zeta}_{\theta_3} + \frac{\partial E}{\partial \phi_3} \vec{\zeta}_{\phi_3} \right) \Big|_{P^0} \cdot \left( d\theta_1 \vec{\zeta}_{\theta_1} + d\phi_1 \vec{\zeta}_{\phi_1} + d\theta_2 \vec{\zeta}_{\theta_2} + d\phi_2 \vec{\zeta}_{\phi_2} + d\theta_3 \vec{\zeta}_{\theta_3} + d\phi_3 \vec{\zeta}_{\phi_3} \right) = 0, \quad (4.11)$$

donde  $\vec{\zeta}_{\theta_1}, \vec{\zeta}_{\phi_1}, \vec{\zeta}_{\theta_2}, \vec{\zeta}_{\phi_2}, \vec{\zeta}_{\theta_3}, \vec{\zeta}_{\phi_3}$ , son los vectores unitarios en dicho hiperespacio 7-dimensional. Multiplicando escalarmente obtenemos

$$\frac{\partial E}{\partial \theta_1} \Big|_{P^0} d\theta_1 + \frac{\partial E}{\partial \phi_1} \Big|_{P^0} d\phi_1 + \frac{\partial E}{\partial \theta_2} \Big|_{P^0} d\theta_2 + \frac{\partial E}{\partial \phi_2} \Big|_{P^0} d\phi_2 + \frac{\partial E}{\partial \theta_3} \Big|_{P^0} d\theta_3 + \frac{\partial E}{\partial \phi_3} \Big|_{P^0} d\phi_3 = 0. \quad (4.12)$$

Como las diferenciales  $d\theta_1, d\phi_1, \dots$  son linealmente independientes, entonces debe cumplirse que

$$\frac{\partial E}{\partial \theta_1} \Big|_{P^0} = \frac{\partial E}{\partial \phi_1} \Big|_{P^0} = \frac{\partial E}{\partial \theta_2} \Big|_{P^0} = \frac{\partial E}{\partial \phi_2} \Big|_{P^0} = \frac{\partial E}{\partial \theta_3} \Big|_{P^0} = \frac{\partial E}{\partial \phi_3} \Big|_{P^0} = 0, \quad (4.13)$$

la cual es la condición para el equilibrio.

Por razones de simplicidad, en el presente trabajo se considera el sistema de referencia mostrado en la figura 2.1b, donde el campo externo  $\vec{H}$  es aplicado paralelo al plano de las capas en la válvula de espín, por lo que se espera que en el equilibrio las magnetizaciones también se encuentren paralelo al plano de las capas; es decir,

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0. \quad (4.14a)$$

Con esta condición la ecuación de equilibrio (Ec. 4.13) se reduce a

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \phi_1} \right|_{P^0} = \left. \frac{\partial E}{\partial \phi_2} \right|_{P^0} = \left. \frac{\partial E}{\partial \phi_3} \right|_{P^0} = 0. \quad (4.14b)$$

Reemplazando los valores de la Ec. (4.14a), junto con las condiciones de la Ec. (4.14b), en la ecuación de energía Ec. (4.9) se obtienen tres ecuaciones acopladas:

$$H \sin(\alpha - \phi_1) = \frac{H_{u1}}{2} \sin(2\phi_1) - \frac{J_{bl}}{t_1 M_1} \sin(\phi_1 - \phi_2) + \frac{J_{bc}}{t_1 M_1} \sin(2(\phi_1 - \phi_2)), \quad (4.15a)$$

$$\begin{aligned} H \sin(\alpha - \phi_2) = & \frac{H_{u2}}{2} \sin(2\phi_2) + H_E \sin(\phi_2 - \phi_3) \\ & - \frac{J_{bl}}{t_2 M_2} \sin(\phi_1 - \phi_2) - \frac{J_{bc}}{t_2 M_2} \sin(2(\phi_1 - \phi_2)), \end{aligned} \quad (4.15b)$$

$$H_E \sin(\phi_2 - \phi_3) = H_W \sin \phi_3 \quad (4.15c)$$

cuyas soluciones nos dan las posiciones de equilibrio de las magnetizaciones  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$ .

### 4.3. La ecuación de Landau - Lifshitz

Siguiendo la discusión hecha sobre resonancia ferromagnética, dada en la Sección 2.3, si al sistema se le somete a la acción de un campo magnético estático externo, los momentos magnéticos de cada capa son perturbados de sus posiciones de equilibrio por lo que precesarán alrededor de sus orientaciones de equilibrio. Esta dinámica se expresa mediante la ecuación de Landau-Lifshitz [Landau 65], la cual describe la dinámica de la magnetización para cada vector de magnetización  $\vec{M}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ); es decir,

$$\frac{\partial \vec{M}_i(t)}{\partial t} = -\gamma \vec{M}_i(t) \times \vec{H}_{eff} - \frac{\lambda}{M_s} \left[ \vec{M}_i(t) \times \vec{M}_i(t) \times \vec{H}_{eff} \right]. \quad (4.16)$$

Aquí el primer término del lado derecho describe el movimiento de precesión de la magnetización  $\vec{M}_i(t)$ , debido al hecho de que la magnetización proviene del espín del electrón, alrededor del campo efectivo  $\vec{H}_{eff}$  (véase la Fig. 4.2) donde  $\gamma$  es la razón giromagnética  $\gamma = g|e_0|/(2m_e) = 2.8 \text{ GHz kOe}^{-1}$  siendo  $g$  el factor de Landé y  $e_0$ ,  $m_e$  son la carga y la masa del electrón, respectivamente. El segundo término es un término disipativo o de amortiguamiento conocido en la literatura como “*damping*” el cual hace que, luego de cierto tiempo, la magnetización se alinee con el campo  $\vec{H}_{eff}$  (esto está representado de color verde en la Fig. 4.2).  $\lambda$  es la constante de amortiguamiento [Landau 35]; sin embargo, en este trabajo no se va a considerar el término de amortiguamiento quedando entonces la ecuación de Landau-Lifshitz como

$$\frac{\partial \vec{M}_i(t)}{\partial t} = -\gamma \vec{M}_i(t) \times \vec{H}_{eff}. \quad (4.17)$$

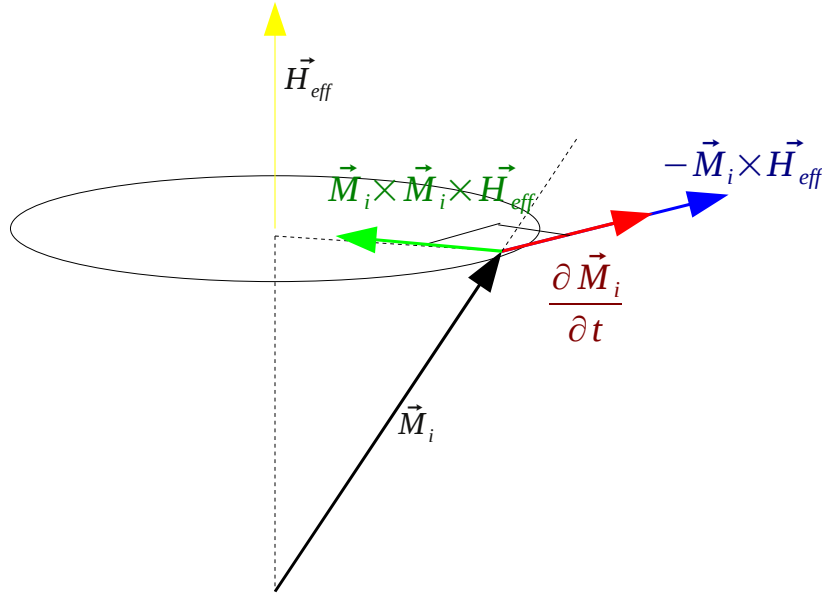


Figura 4.2: Representación gráfica de la Ec. 4.16 en el que se muestra el término de precesión (color azul) y el término de amortiguamiento (color verde) que hace que con el tiempo la magnetización se alinee paralela al campo (color amarillo).

Ahora bien, el campo magnético efectivo  $\vec{H}_{eff}$  puede obtenerse a partir de la densidad de energía libre por unidad de volumen  $\xi$  como

$$\vec{H}_{eff} = -\nabla_{M_i} \xi. \quad (4.18)$$

Pero la energía que se ha obtenido en la Ec. (4.9) es la energía libre por unidad de superficie  $E$ ; es decir,  $E = t_i \xi$ , con  $t_i$  el espesor de la capa  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Entonces, la Ec. (4.18) se puede escribir como

$$\vec{H}_{eff} = \frac{1}{t_i} \nabla_{M_i} E.$$

Así la Ecuación de Landau-Lifshitz para cada capa ferromagnética ( $i = 1, 2, 3$ ) se puede expresar como

$$\frac{\partial \vec{M}_i(t)}{\partial t} = -\frac{\gamma}{t_i} \vec{M}_i(t) \times \nabla_{M_i} E. \quad (4.19)$$

En este trabajo no se considera el tercer término de amortiguamiento, como se mencionó líneas arriba, ya que se asume que  $\lambda$  es muy pequeño lo que significa que el tiempo de amortiguamiento es muy largo para nuestros fines. Además, para la condición de resonancia se asume que las desviaciones de la posición de equilibrio son muy pequeños [Zhang 94]; esto significa que  $\vec{M}_i$  se puede expresar como

$$\vec{M}_i = \vec{M}_{i0} + m \exp(i\omega t), \quad (4.20)$$

donde  $\vec{M}_{i0}$  es la magnetización de saturación de la capa  $i$ -ésima y  $\omega$  la frecuencia angular de la radiación electromagnética.

## 4.4. Método de análisis

El método que se usará para analizar la resonancia ferromagnética descrita por la Ec. 4.19 es el método de las coordenadas esféricas seguido por Smit y Beljers [Smit 55] y por [Suhl 55], el cual consiste básicamente de tres partes:

- 1 Expresar la Ec. (4.19) en coordenadas esféricas teniendo en cuenta que el módulo de la magnetización permanece constante.
- 2 Obtener la energía libre  $E$  en forma de una expansión en series de Taylor, tomando la aproximación a la segunda potencia.
- 3 Se asume que en la condición de resonancia los ángulos  $\theta_i$  y  $\phi_i$  varían de forma exponencial; es decir:

$$\theta_i = \theta_i^0 + \Delta\theta_i \exp(i\omega t), \quad (4.21a)$$

$$\phi_i = \phi_i^0 + \Delta\phi_i \exp(i\omega t), \quad (4.21b)$$

donde  $\theta_i^0$  y  $\phi_i^0$  son los ángulos obtenidos de la condición de equilibrio.

Entonces, es relativamente fácil demostrar, tal como se detalla en el Apéndice A, que la ecuación de Landau-Lifshitz en coordenadas polares se escribe como:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = -\frac{\gamma}{t_i M_i \sin \theta_i} \frac{\partial E}{\partial \phi_i} \quad (4.22a)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = \frac{\gamma}{t_i M_i \sin \theta_i} \frac{\partial E}{\partial \theta_i} \quad (4.22b)$$

Ahora bien, haciendo una expansión en series (aproximada a la segunda derivada) del gradiente de energía en torno a las posiciones de equilibrio  $\phi_i, \theta_i$  y reemplazando este resultado en la Ec. 4.22 para  $M_1, M_2$  y  $M_3$ , obtenemos un sistema de seis ecuaciones acopladas, las cuales, siguiendo a Smit y Beljer [Smit 55] como se detalla en el Apéndice A, se pueden expresar en forma matricial [Rezende 98],[Layadi 01], [Azevedo 05] tal como sigue

$$\begin{bmatrix} (E_{\theta_1\phi_1} + iZ_1) & E_{\phi_1\phi_1} & E_{\phi_1\theta_2} & E_{\phi_1\phi_2} & E_{\phi_1\theta_3} & E_{\phi_1\phi_3} \\ E_{\theta_1\theta_1} & (E_{\theta_1\phi_1} - iZ_1) & E_{\theta_1\theta_2} & E_{\theta_1\phi_2} & E_{\theta_1\theta_3} & E_{\theta_1\phi_3} \\ E_{\theta_1\phi_2} & E_{\phi_1\phi_2} & (E_{\theta_2\phi_2} + iZ_2) & E_{\phi_2\phi_2} & E_{\theta_2\theta_3} & E_{\phi_2\phi_3} \\ E_{\theta_1\theta_2} & E_{\phi_1\theta_2} & E_{\theta_2\theta_2} & (E_{\theta_2\phi_2} - iZ_2) & E_{\theta_2\theta_3} & E_{\theta_2\phi_3} \\ E_{\theta_1\phi_3} & E_{\phi_1\phi_3} & E_{\theta_2\phi_3} & E_{\phi_2\phi_3} & (E_{\theta_3\phi_3} + iZ_3) & E_{\phi_3\phi_3} \\ E_{\theta_1\theta_3} & E_{\phi_1\theta_3} & E_{\theta_2\theta_3} & E_{\phi_2\theta_3} & E_{\theta_3\theta_3} & (E_{\theta_3\phi_3} - iZ_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\phi_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\phi_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \Delta\phi_3 \end{bmatrix} = 0$$

donde los elementos  $E_{ij}$  denotan las segundas derivadas respecto a los ángulos  $\theta_i$  y  $\phi_i$ , las cuales tienen su origen debido a la expansión en series del gradiente, evaluadas en la posición de equilibrio,  $Z_i = t_i \omega M_i \sin \theta_i / \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) en la cual  $\omega$  es la frecuencia de precesión de los momentos magnéticos y  $\gamma_i$  es la razón giromagnética. Para que esta ecuación matricial tenga

solución no trivial, el determinante de la matriz de energía debe ser cero; es decir, el polinomio de cuarto grado en  $\omega$  conocida como la relación de dispersión, debe ser cero

$$\omega^4 - b(H)\omega^2 + c(H) = 0. \quad (4.23)$$

Aquí los coeficientes  $b(H)$  y  $c(H)$  se expresan de la siguiente manera (las derivadas de la energía son evaluadas en las posiciones de equilibrio ( $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^\circ$ )):

$$\begin{aligned} b(H) &= \gamma_1^2 H_1^I H_2^I + \gamma_2^2 H_1^{II} H_2^{II} + c_1 \left( \frac{\gamma_2^2 H_2^{II}}{a} + \frac{\gamma_1^2 H_2^I}{b} \right) + c_2 \left( \frac{\gamma_2^2 H_1^{II}}{a} + \frac{\gamma_1^2 H_1^I}{b} \right) \\ &\quad + c_1 c_2 \left( \frac{\gamma_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_2^2}{a^2} \right) + \frac{2c_0 c_2 \gamma_1 \gamma_2}{ab} \\ c(H) &= \gamma_1^2 \gamma_2^2 [H_2^I H_2^{II} + c_2 \left( \frac{H_2^{II}}{b} + \frac{H_2^I}{a} \right)] [H_1^I H_1^{II} + c_1 \left( \frac{H_1^{II}}{b} + \frac{H_1^I}{a} \right) + \frac{c_1^2 - c_0^2}{ab}] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} c_0 &= J_{bl} + 2J_{bc} \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ c_1 &= J_{bl} \cos(\phi_1 - \phi_2) + 2J_{bc} \cos^2(\phi_1 - \phi_2) \\ c_2 &= J_{bl} \cos(\phi_1 - \phi_2) + 2J_{bc} \cos(2(\phi_1 - \phi_2)) \\ H_1^{II} &= H \cos(\alpha - \phi_2) - H_{keff2} + H_{u2} \cos^2 \phi_2 + H_E \frac{H_W \cos \phi_3 \cos(\phi_2 - \phi_3) - H_E \sin^2(\phi_2 - \phi_3)}{H_E \cos(\phi_2 - \phi_3) + H_W \cos \phi_3} \\ H_2^{II} &= H \cos(\alpha - \phi_2) + H_{u2} \cos 2\phi_2 + H_E \frac{H_W \cos \phi_3 \cos(\phi_2 - \phi_3)}{H_E \cos(\phi_2 - \phi_3) + H_W \cos \phi_3} \\ H_1^I &= H \cos(\alpha - \phi_1) - H_{keff1} + H_{u1} \cos^2 \phi_1 \\ H_2^I &= H \cos(\alpha - \phi_1) + H_{u1} \cos 2\phi_1 \\ H_{keff1} &= H_{u1}^{out} - 4\pi M_1 \\ H_{keff2} &= H_{u2}^{out} - 4\pi M_2. \end{aligned}$$

I y II hacen referencia a las capas FM1 y FM2.

## 4.5. Implementación numérica

Esta sección está dedicada a la discusión del algoritmo y su implementación numérica en el lenguaje FORTRAN 90 para determinar dos relaciones importantes en el estudio de la resonancia ferromagnética que se emplean en la discusión de los resultados mostrados en el siguiente capítulo; a saber:

- La relación entre la frecuencia de resonancia  $\omega$  versus el campo aplicado  $H$ , y
- la dependencia angular *in-plane* del campo resonante  $H_R$ .

### 4.5.1. Frecuencia de resonancia $\omega$ versus campo aplicado $H$

A partir de la relación de dispersión Ec. 4.23, a simple vista pareciera que para determinar  $\omega$  basta hacer variar el campo  $H$  dado en los coeficientes  $b(H)$  y  $c(H)$ . Sin embargo, los coeficientes  $b$  y  $c$  dependen no solamente de  $H$  sino también de las posiciones de equilibrio de las magnetizaciones ( $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$ ). Por ello, se ha elaborado un algoritmo que es mostrado en la figura 4.3a. La lógica del algoritmo es como sigue: dado cierto campo  $H$ , que se hace variar dentro del intervalo de estudio manteniendo fijo el ángulo  $\alpha$ , se obtiene a través de las ecuaciones de equilibrio las posiciones de equilibrio  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  (Ec. 4.15a, 4.15b y 4.15c). Con ello se pueden obtener los coeficientes  $b$  y  $c$  que luego se reemplazan en la relación de dispersión (Ec. 4.23) para obtener finalmente las raíces positivas de dicha ecuación de cuarto grado, en función de  $H$ .

### 4.5.2. Dependencia angular $\alpha$ del campo de resonancia $H_R$

Esta relación es importante ya que generalmente en los experimentos de resonancia ferromagnética lo que permanece fijo es la frecuencia  $\omega$  de la radiación de microonda y lo que varía es el campo externo aplicado  $H$  junto con el ángulo  $\alpha$ . Para dicho propósito se ha desarrollado el algoritmo mostrado en la figura 4.3b, cuya lógica razona de la siguiente manera: para cada ángulo  $\alpha$ , en el intervalo  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ , se hace variar el campo externo  $H$ , dentro de cierto intervalo de estudio, con el objetivo de obtener un valor de  $H$  para el cual la frecuencia  $\omega$  a través de la Ec. 4.23 sea aproximadamente igual al valor experimental  $\omega_{exp}$  usada en el experimento, por eso la variable  $min = |\omega - \omega_{exp}|$  (ver figura 4.3b) va a seleccionar el valor de  $\omega$  para el cual la variable  $min$  sea la mínima; es decir que el valor de  $\omega$  se aproxime bastante al valor usado en el experimento  $\omega_{exp}$ .

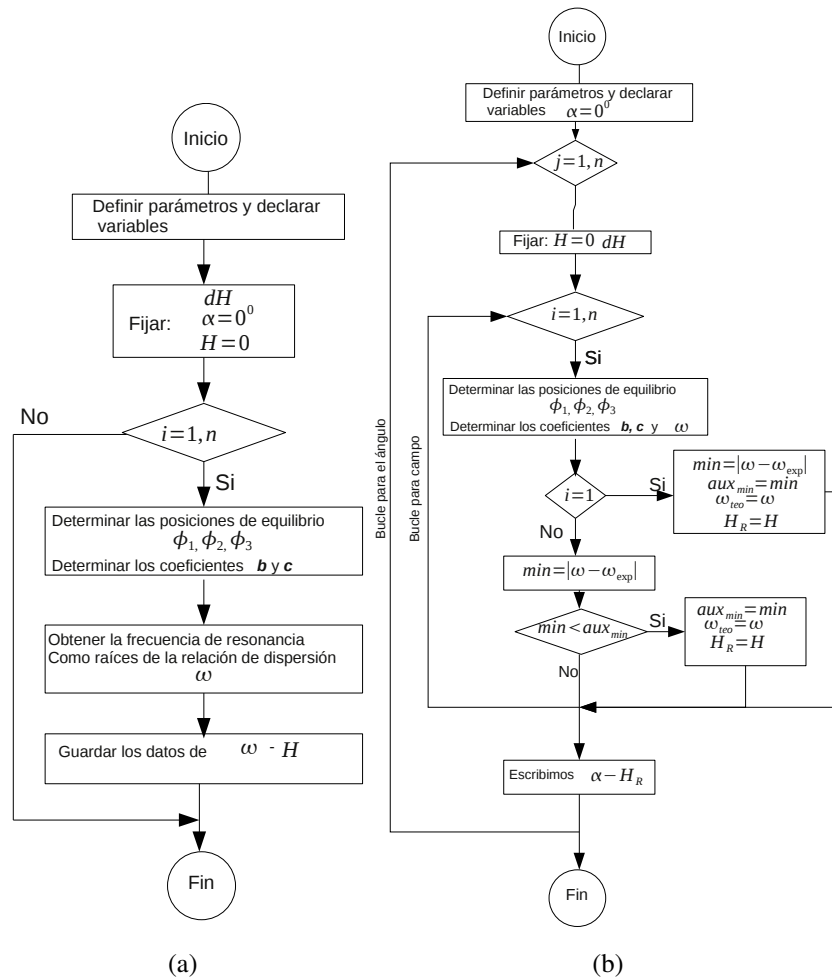


Figura 4.3: Algoritmo que muestra ilustrativamente la lógica del programa implementado en FORTRAN 90 para determinar (a) la frecuencia de resonancia versus el campo aplicado y (b) la dependencia angular del campo de resonancia





# Capítulo 5

## Aplicación del modelo al sistema IrMn/Co/Ru(t)/NiFe

Habiendo ya tratado el aspecto teórico de la resonancia ferromagnética, las diferentes contribuciones a la densidad de energía libre de Helmholtz y establecido el algoritmo para resolver la relación de dispersión, ya se tiene el camino preparado para aplicar el modelo a sistemas reales y comparar las medidas experimentales con los ajustes teóricos. Ello es lo que se realizará en el presente capítulo. Para ello se discutirá primeramente el efecto que tiene el espesor de la capa no magnética, NM, sobre la frecuencia de resonancia ( $f$ ) y el campo resonante ( $H_R$ ) ferromagnético. Dicho estudio se realizará para tres casos: acoplamiento ferromagnético, antiferromagnético y sin acoplamiento. Luego, se estudiará el sistema IrMn/Co/Ru(t)/NiFe para tres espesores diferentes ( $t = 24, 32, 200 \text{ \AA}$ ) de la capa espaciadora no magnética. Además, cabe mencionar que en este estudio el espesor de la capa NM no se ha utilizado directamente, sino a través del factor o fuerza de acoplamiento de intercambio intercapa  $J$ . Esto se puede hacer dado que hay una relación bien conocida que las relaciona en el límite  $t \rightarrow \infty$  [Bruno 99]; es decir,

$$J \propto \frac{\sin(2k_F t)}{t^2}, \quad (5.1)$$

donde  $t$  es el espesor de la capa NM. Por ende, de aquí en adelante se utilizará el factor de acoplamiento de intercambio intercapa  $J$  como una medida indirecta de la variación del espesor  $t$  del espaciador NM.

### 5.1. Efecto del factor de acoplamiento de intercambio intercapa sobre la frecuencia de resonancia

Como bien se dijo en la introducción de este trabajo, el espesor de la capa NM en la válvula de espín juega un papel muy importante en el comportamiento magnético de este sistema. Al hacer variar dicho espesor las propiedades magnéticas cambian drásticamente, observándose desde un comportamiento ferromagnético (en el que las magnetizaciones de las capas FM son paralelas) hasta un comportamiento antiferromagnético (donde las magnetizaciones de las capas

FM son antiparalelas). Por ello es importante estudiar el efecto que tiene el espaciador NM, mediado a través del factor de acoplamiento de intercambio intercapa  $J$ , sobre el comportamiento magnético de la válvula de espín.

Considerando que el campo externo  $H$  se aplica paralelo al plano de las capas (véase la Ec. 4.14), la energía libre de Helmholtz expresada en la Ec. 4.9 puede escribirse de la siguiente forma reducida

$$\begin{aligned}
 E = & t_1 \left[ -M_1 H \cos(\alpha - \phi_1) - \frac{M_1 H_{u1}}{2} \cos^2 \phi_1 \right] + t_2 \left[ -M_2 H \cos(\alpha - \phi_2) \right. \\
 & \left. - \frac{M_2 H_{u2}}{2} \cos^2 \phi_2 - M_2 H_E (\cos(\phi_2 - \phi_3)) - M_2 H_W \cos \phi_3 \right] \\
 & - J_{bl} [\cos(\phi_1 - \phi_2)] - J_{bc} [\cos(\phi_1 - \phi_2)]^2.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

En esta ecuación, si el factor de acoplamiento bilineal es positivo ( $J_{bl} > 0$ , considerando  $J_{bc} = 0$ ), la energía total  $E$  será mínima cuando  $\cos(\phi_1 - \phi_2) = 1$ ; es decir cuando  $\phi_1 = \phi_2$ . Esto significa que las magnetizaciones se encuentran paralelas entre sí (apuntando en la misma dirección) tratándose entonces, tal como se mencionó en la sección 3.3, de un acoplamiento ferromagnético. Por el contrario, si el factor de acoplamiento bilineal es negativo ( $J_{bl} < 0$ ), entonces la energía total  $E$  será mínima cuando  $\cos(\phi_1 - \phi_2) = -1$ ; es decir, cuando  $\phi_1 = \phi_2 + 180^\circ$ ; indicando que las magnetizaciones apuntan en direcciones contrarias, tratándose de un acoplamiento antiferromagnético. Por otro lado, si  $J_{bc}$  domina, entonces el mínimo de  $E$  se dará cuando las magnetizaciones sean perpendiculares ( $\phi_1 - \phi_2 = 90^\circ$ ). Por último, en el caso de acoplamiento cero ( $J_{bl} = 0$ ), las capas FM1 y FM2 ya no se encontrarían acopladas por lo que la energía total sería mínima cuando ambos términos del miembro derecho de la ecuación 5.2 sean mínimas. Estos mínimos dependen de las anisotropías presentes en cada una de las capas FM1 y FM2. Las consideraciones previas, para los cálculos de los modos normales resonantes de posición para estos tres casos de acoplamiento son las siguientes:

- Las capas ferromagnéticas FM1 y FM2 presentan una dirección uniaxial paralela a la dirección del eje X (revise la sección 4.1).
- El campo magnético  $H$  se considera paralelo al plano de las capas y se dirige a lo largo del eje uniaxial  $\hat{u}$  donde  $\alpha = 0$  (véase la fig. 4.1b).
- Se considera que hay un predominio del factor de acoplamiento bilineal  $J_{bl}$  sobre el factor de acoplamiento bicuadrático  $J_{bc}$  por lo que este último se desprecia.
- La energía de rotación de la pared de dominio  $\sigma_W$  se considera muy grande por lo que  $H_E \ll H_W$ .

A continuación se mostrará algunos resultados obtenidos para los tres casos mencionados líneas arriba.

### 5.1.1. Acoplamiento ferromagnético $J_{bl} > 0$

En este tipo de acoplamiento se espera que las magnetizaciones  $\vec{M}_1$  y  $\vec{M}_2$  se alinien paralelamente y en la misma dirección que el campo externo  $H$  para cualquier valor de este, por lo que se espera que los ángulos de equilibrio sean iguales al ángulo del campo externo, es decir:  $\alpha = \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ . Esta información junto con el algoritmo descrito en la sección 4.5.1, mostrado ilustrativamente en la figura 4.3a, permiten obtener las dos soluciones reales y positivas de la relación de dispersión

$$\omega^4 - b(H)\omega^2 + c(H) = 0, \quad (5.3)$$

las cuales son los dos modos normales de resonancia. La figura 5.1 muestra la curva de la relación de dispersión para  $J_{bl} = 0.5 \text{ erg cm}^{-2}$ , en ella se puede observar a los dos modos de resonancia: el modo acústico y el modo óptico. Resulta que en el modo acústico las magnetizaciones  $\vec{M}_1$  y  $\vec{M}_2$  precesan en fase, por lo que la energía de acoplamiento se mantiene constante durante la precesión sin afectar la condición de resonancia [Zhang 94], así que se habla de una degenerancia de la relación de dispersión, como si se tratara de un sistema de una sola capa ferromagnética. Por otro lado, en el modo óptico las magnetizaciones precesan desfasadas y la energía de inter-

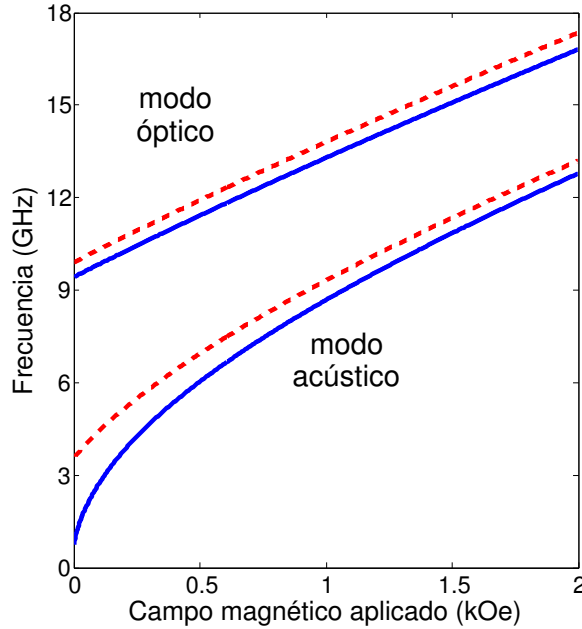


Figura 5.1: Relación entre la frecuencia de resonancia  $f$  y el campo externo  $H$ , obtenidas a partir de la relación de dispersión (véase la Ec. 5.3), la cual fue simulada con los siguientes parámetros:  $J_{bl} = 0.5 \text{ erg/cm}^2$ ,  $J_{bc} = 0$ .  $H_E = 0$  (líneas sólidas),  $H_E = 250 \text{ Oe}$  (líneas punteadas). Capa FM1:  $4\pi M_1 = 6 \text{ kG}$ ,  $H_{keff_1} = -6 \text{ kOe}$ ,  $H_{U1} = 0 \text{ Oe}$ ,  $t_1 = 100 \text{ Å}$ ,  $\gamma_1/2\pi = 2.8 \text{ GHz kOe}^{-1}$ . Capa FM2:  $4\pi M_2 = 10 \text{ kG}$ ,  $H_{keff_2} = -10 \text{ kOe}$ ,  $H_{U2} = 10 \text{ Oe}$ ,  $t_2 = 200 \text{ Å}$ ,  $\gamma_2/2\pi = 2.8 \text{ GHz kOe}^{-1}$ .

cambio ya no permanece constante durante la precesión alterando de esa manera la relación de dispersión. Esto conlleva a que se introduzca un campo extra  $H_{inter}$  en el campo efectivo  $H_{eff}$  dado por

$$H_{inter} = \frac{2J_{bl}}{t_1 M_{s1}} = \frac{2J_{bl}}{t_2 M_{s2}}. \quad (5.4)$$

Debido a que  $J_{bl} > 0$ , su contribución a la energía libre resulta ser negativa (véase la ec. 5.2), por ende al introducir el campo  $H_{inter}$  en la relación de dispersión trae consigo que la curva de dispersión se desplace hacia la izquierda (véase fig. 5.1). Esto se puede explicar de la siguiente manera: para una misma frecuencia (como ayuda se puede trazar una recta horizontal en la fig. 5.1) el campo resonante más alejado, correspondiente al modo acústico, disminuye en una cantidad  $H_{inter}$  hacia el modo óptico; por tanto podemos decir que para este caso de acoplamiento ferromagnético el modo acústico corresponde a los campos altos o a las frecuencias bajas y el modo óptico corresponde a los campos bajos o a las frecuencias altas.

Además, se observa que conforme se incrementa el campo, las frecuencias de ambos modos también se incrementan. Además, la aparición de un campo de anisotropía  $H_E = 250 Oe$  (líneas punteadas), producto del acoplamiento entre la capa FM2 y AFM, ocasiona que las curvas de frecuencia para ambos modos se desplacen hacia frecuencias altas, siendo este corrimiento más importante para el modo acústico en campos bajos. Así conforme se incrementa el campo, el corrimiento tiene el mismo orden de magnitud. Al contrario, para las frecuencias del modo óptico el corrimiento tiende a ser uniforme siendo del mismo orden de magnitud para todos los campos [Layadi 05].

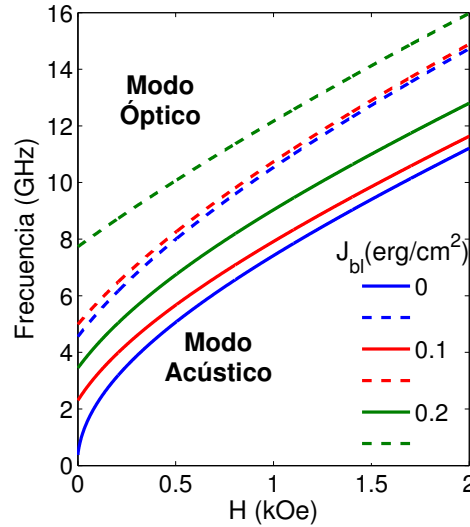


Figura 5.2: Dependencia entre la frecuencia  $f$  y el campo  $H$  resonante para distintos valores del factor de acoplamiento  $J_{bl}$ . Las líneas sólidas (modo acústico) y punteadas (modo óptico) del mismo color corresponden a un solo valor de  $J_{bl}$  indicado en la leyenda. Los parámetros utilizados para la simulación fueron los mismos que el de la figura 5.1 con  $H_E = 0$ .

La relación de dispersión dependiente del factor de acoplamiento bilineal ( $J_{bl}$ ) para un acopla-

miento positivo se muestra en la figura 5.2. En ella se observa que para el caso de acoplamiento cero ( $J_{bl} = 0$ ) los modos resonantes corresponden a las capas individuales FM1 y FM2. Así conforme va aumentando la fuerza de acoplamiento intercapa bilineal, las frecuencias de ambos modos experimentan un corrimiento hacia altas frecuencias observándose que para campos altos la dependencia es lineal para ambos modos.

### 5.1.2. Acoplamiento antiferromagnético $J_{bl} < 0$

Ahora bien, para un acoplamiento antiferromagnético se espera que las magnetizaciones en campo cero ( $H = 0$ ) se alineen antiparalelamente y, luego, conforme el campo externo aumente, las magnetizaciones tiendan a alinearse paralelamente. La figura 5.3 muestra la relación de dispersión para  $J_{bl} = -2 \text{ erg/cm}^2$  y es interesante observar que a diferencia del acoplamiento ferromagnético, el modo acústico corresponde a las frecuencias altas o campos bajos, y el modo óptico corresponde a las frecuencias bajas o campos altos [Lindner 03], [Baberschke 07]. Además, es interesante observar que conforme se incrementa el campo externo (de 0 a 1kOe),

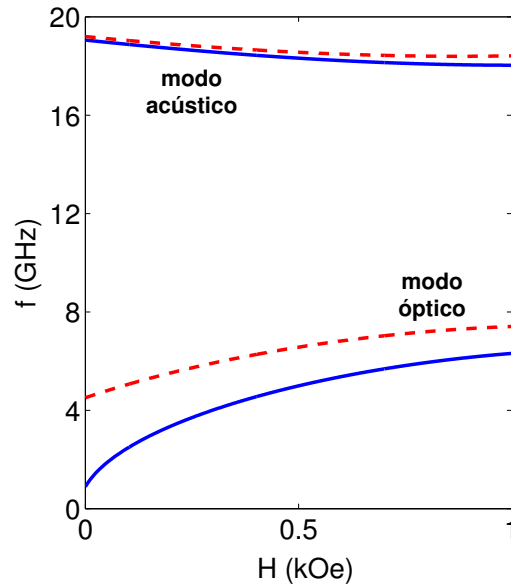


Figura 5.3: Relación de dispersión de un acoplamiento antiferromagnético para  $J_{bl} = -2.0 \text{ erg/cm}^2$ . Los parámetros para la simulación fueron los mismos que se usaron en en la figura 5.1 con  $H_E = 0$  (líneas sólidas) y  $H_E = 250 \text{ Oe}$  (líneas punteadas)

el modo acústico disminuye ligeramente y el modo óptico se incrementa. Asimismo, la aparición de una anisotropía de intercambio ( $H_E = 250 \text{ Oe}$ , líneas punteadas) parece afectar más al modo acústico que al modo óptico, también se observa un *gap* de frecuencias entre el modo acústico y el modo óptico. La relación de dispersión para diferentes valores del factor (fuerza) de acoplamiento AFM se observa en la figura 5.4. En ella se ve que para acoples débiles hay un predominio del modo acústico. Al contrario, para un acople AFM fuerte ( $J_{bl} = 5.0 \text{ erg/cm}^2$ ) hay una mayor presencia del modo óptico dentro de la banda-X.

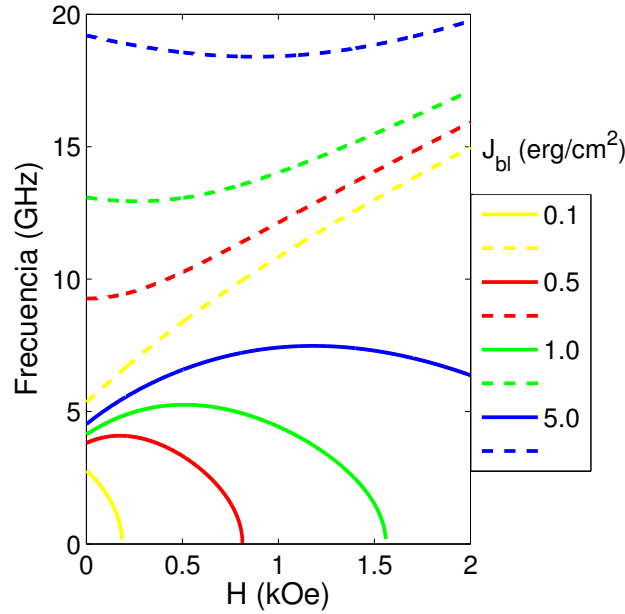


Figura 5.4: Relación de dispersión para diferentes valores del factor de acoplamiento  $J_{bl}$  antiferromagnético. Las líneas sólidas (modo óptico) y punteadas (modo acústico) de un mismo color corresponden al mismo valor de  $J_{bl}$ . Los parámetros usados en la simulación fueron las mismas que el de la figura 5.1 con  $H_E = 250$  Oe.

## 5.2. Efecto del factor de acoplamiento bilineal en la dependencia angular del campo resonante $H_R$

Ya habiendo obtenido la dependencia de la frecuencia de resonancia versus el campo magnético externo y debido a que en los experimentos es más fácil manipular el campo magnético externo en lugar que la frecuencia  $\omega$ , en esta sección se muestran algunos resultados de cómo afecta la fuerza o factor de acoplamiento  $J_{bl}$  en el campo resonante  $H_R$  que está en función del ángulo *in-plane* ( $\alpha$ ). Para ello se ha utilizado un algoritmo de tipo regresivo mostrado en la sección 4.5 (véase la fig. 4.3b) para la resolución de la relación de dispersión (véase la ec. 4.23). Dicho algoritmo consiste básicamente en la búsqueda de un valor de  $H$  que satisfaga la relación de dispersión (ec. 4.23) manteniendo fija la frecuencia de radiofrecuencia  $\omega$ . Esto se hace para todos los ángulos en el rango  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  (con  $\Delta\alpha = 1^\circ$ ). El factor de acoplamiento bilineal  $J_{bl}$  se ha simulado considerando un campo de acoplamiento bilineal

$$H_{bl} = \frac{J_{bl}}{t_i M_i}, \quad (5.5)$$

para cada capa FM ( $i = 1, 2$ ). Los resultados se muestran en la figura 5.5. Allí se puede observar que a medida que  $H_{bl}$  se incrementa, el comportamiento del campo de FMR para ambas capas FMs cambia desde un acoplamiento cero ( $H_{bl} = 0$  Oe) hasta un acoplamiento fuerte ( $H_{bl} = 40$

Oe). Estos resultados están en buen acuerdo con los datos reportados en la ref. [Azevedo 05]. Además, la discusión precedente, sobre la relación de dispersión para un acoplamiento FM, nos permite identificar que la curva para campos altos corresponde al modo acústico y para campos bajos al modo óptico (véase la sec. 5.1.1). Cuando el factor de acoplamiento es cero ( $H_{bl} = 0$  Oe) se entiende que el espesor de la capa NM es demasiado grande como para que exista un acople entre las capas FM1 y FM2. Esta ausencia de acoplamiento causa que la forma de la curva de resonancia tenga una simetría de dos pliegues (*twofold*) característico de estructuras cristalinas como la simetría hexagonal de cuerpo centrado (hcp) y tetragonal, debido a la anisotropía magnetocristalina uniaxial que presentan estos sistemas. Esta simetría consiste en que para  $\alpha = 0^\circ$  y  $\alpha = 180^\circ$  el campo resonante  $H_R$  presenta el mismo valor. Además, para  $\alpha = 90^\circ$  el campo de resonancia presenta un pico máximo. Por otro lado, la aparición de un acoplamiento ferromagnético ( $H_{bl} > 0$ ) entre la capa libre (FM1) y la capa fijada o de referencia (FM2) ocasiona la desaparición de la simetría de dos pliegues, ya que el campo resonante para  $\alpha = 0^\circ$  no es el mismo que para  $\alpha = 180^\circ$  siendo en este último caso mayor; es decir,  $H_{R(\alpha=0)} < H_{R(\alpha=180^\circ)}$ .

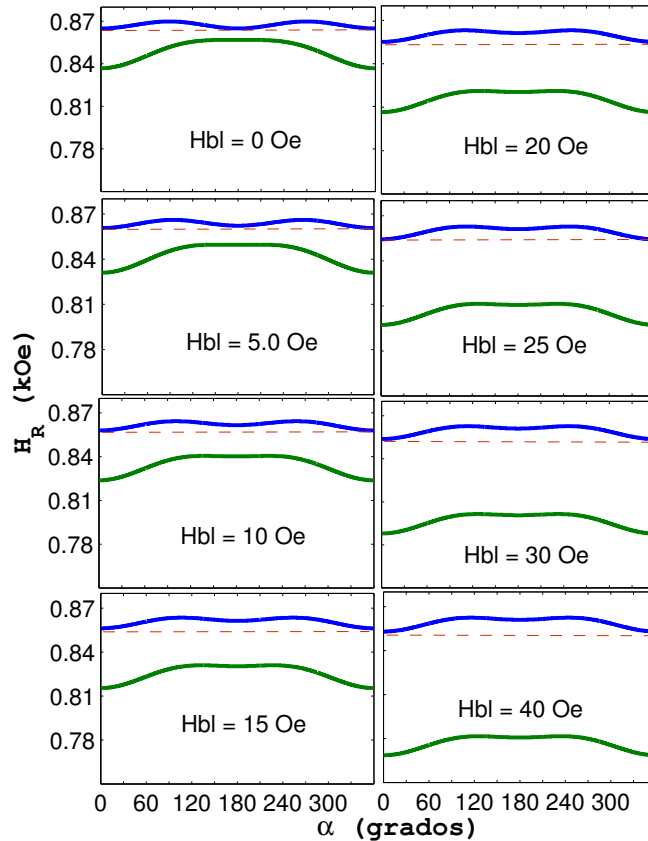


Figura 5.5: Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo resonante ( $H_R$ ) para diferentes valores del campo de acoplamiento bilineal ( $H_{bl}$ ). La línea azul corresponde al modo acústico y la línea verde al modo óptico. Los parámetros para la simulación fueron:  $H_{u1} = H_{u2} = 3.0$  Oe,  $4\pi M_1 = 10$  kOe,  $4\pi M_2 = 10.3$  kOe,  $t_1 = t_2 = 100$  Å,  $H_E = 0.010$  kOe,  $H_{u1}^{out} = H_{u2}^{out} = 0.0$  kOe,  $J_{bc} = 0$ .

Otra característica que se puede observar en la figura 5.5 es que a medida que el campo de acoplamiento  $H_{bl}$  aumenta, los campos correspondientes al modo óptico y al modo acústico se desplazan hacia campos menores. Esto se puede entender haciendo un análisis simple de la figura 5.2 manteniendo constante la frecuencia  $\omega$  para diferentes valores de  $J_{bl}$ . La figura 5.6 muestra la relación que existe entre el campo resonante  $H_R$  y el campo de acoplamiento  $H_{bl}$  para los dos modos. En ella se observa que el desplazamiento es más relevante para la capa fijada o de referencia FM2 (modo óptico, línea azul) que para la capa libre FM1 (modo acústico, línea roja), lo cual se constata al hacer una simple observación a la figura 5.5.

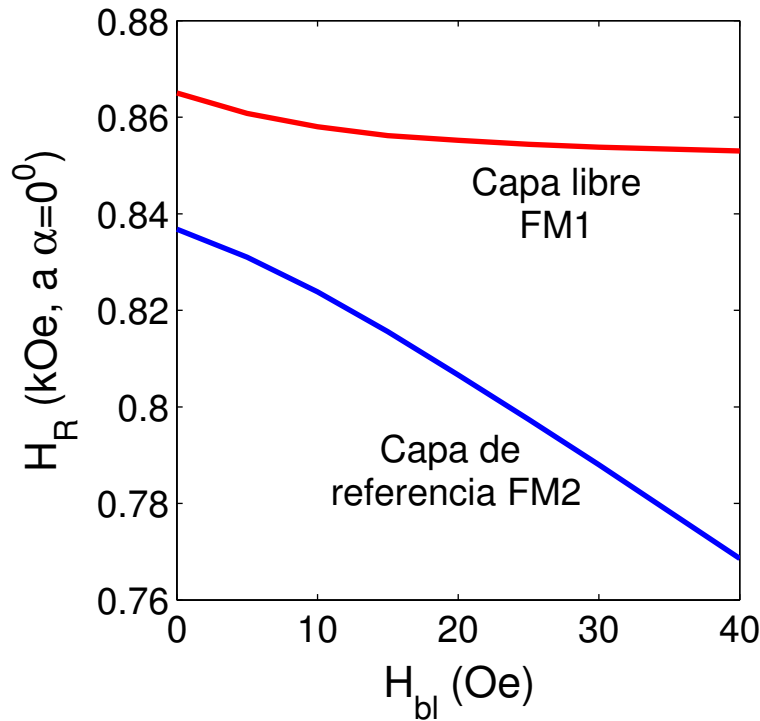


Figura 5.6: Dependencia del campo de FMR ( $H_R$ ) en función del campo de acoplamiento bilineal ( $H_{bl}$ ) tomados de los datos mostrados en la figura 5.5. La línea azul corresponde a los campos de resonancia del modo óptico (capa FM2) y la línea roja al modo acústico (capa FM1). Estos campos de resonancia fueron tomados en  $\alpha = 0^\circ$

Finalmente, luego de discutir varios casos específicos de acoplamiento de intercapa junto con las consideraciones y observaciones rescatadas, estamos listos para analizar al sistema tipo válvula de espín IrMn/Co/Ru(t)/NiFe, lo cual se hará en la siguiente sección.



### 5.3. Estructura del sistema

Cabe mencionar que el sistema válvula de espín estudiado en esta tesis ha sido construido y analizado experimentalmente en el Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) como parte de un trabajo de colaboración teórico-experimental. En el CBPF se utilizó un sistema de *sputtering* magnetrón del tipo planar para la deposición de la multicapa IrMn/Co/Ru/Py a temperatura ambiente y sobre un sustrato de Si(111) cristalino. La presión base dentro de la cámara de deposición fue del orden de  $2 \times 10^{-8}$  Torr y para la deposición de la capa de IrMn la presión fue de  $8 \times 10^{-3}$  Torr, lo cual fue realizada en una atmósfera de Ar. Asimismo, para las mediciones de FMR utilizaron un espectrómetro Bruker ESP-3000 de alta sensibilidad con una frecuencia de microonda en la banda X (9.79 GHz) tal como se indica en la ref. [Alayo 11]. Allí se indican más detalles de dicho experimento. De esta manera se obtiene la multicapa tipo válvula de espín que se muestra esquemáticamente en la figura 5.7.

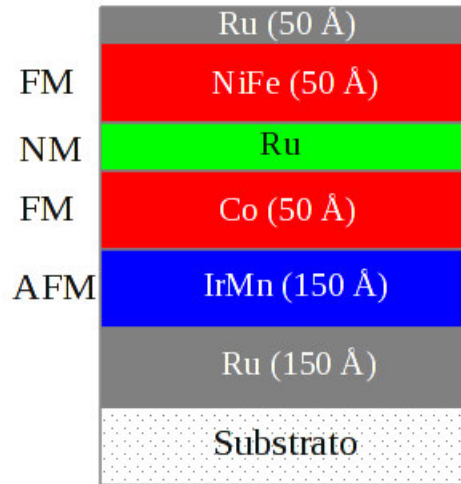


Figura 5.7: Esquema del sistema IrMn/Co/Ru(t)/NiFe. (FM) hace referencia a una capa ferromagnética, (AFM) capa antiferromagnética, (NM) capa no magnética. Las capas no magnéticas de Ru en los extremos de la multicapa se emplean para proteger el sistema bajo estudio.

Como podemos observar en la figura 5.7, un sistema válvula de espín está constituido por tres tipos de materiales: ferromagnético (FM), no magnético (NM) y antiferromagnético (AFM). Los materiales ferromagnéticos estándar se toman del rango fcc del diagrama de fase ternario del NiFeCo [Kools 96]. Una aleación binaria de NiFe ( $\text{Ni}_{81}\text{Fe}_{19}$ ), también conocida como *permalloy*, para la capa FM libre, por ser un material magnéticamente blando y que presenta una estructura fcc; y Co para la capa FM fijada, por ser un material magnéticamente duro. Para el caso del material antiferromagnético, el IrMn ha resultado ser un buen candidato en el diseño de las válvulas de espín debido a su alta temperatura de bloqueo y a su resistencia a la corrosión [Fuke 97], [Lederman 99]. En lo que sigue se discutirán los resultados obtenidos.

## 5.4. Comparación con los datos experimentales

El modelo para la energía libre, Ec. (4.9), junto con el estudio de la resonancia ferromagnética que se plantea en este trabajo, producen resultados que están en buen acuerdo con lo publicado en la literatura. Por ello es factible utilizar dicho modelo para analizar el sistema IrMn/Co/Ru/NiFe [Alayo 11] y ver si los resultados teóricos concuerdan o no con los resultados experimentales. Así se puede lograr un mejor entendimiento sobre los factores determinantes del comportamiento magnético de las válvulas de espín y de estructuras similares.

La información concerniente al sistema  $(\text{Ir}_{20}\text{Mn}_{80})/\text{Co}/\text{Ru}(t)/(\text{Ni}_{81}\text{Fe}_{19})$  se resume en la tabla 5.1. Allí se muestran los espesores de las capas que forman la válvula de espín, la razón giromagnética para cada capa FM, los valores *bulk* del campo de anisotropía planar y de las magnetizaciones de saturación para la capa de cobalto y la capa de NiFe, respectivamente. En este punto cabe mencionar que los autores [Alayo 11] que estudiaron experimentalmente este sistema no consideraron, en su modelo para la energía libre, el término de energía de rotación de pared de dominio entre la capa AFM y FM2 (véase la ec. 4.7). Por ello, en los cálculos mostrados en este trabajo tampoco se ha considerado dicho término; esto significa que se ha considerado  $H_E \ll H_W$ . Sin embargo, a modo comparativo, se han hecho cálculos extras considerando una rotación de pared de dominio de acuerdo al modelo propuesto por Mauri et. al. [Mauri 87], en el que  $H_E < H_W$ . Además, en los ajustes realizados a los tres espesores de la capa de Ru ( $t = 2.4, 3.2, 20.0$  nm), tampoco se consideró la existencia de alguna anisotropía perpendicular al plano de las capas por lo que  $H_{u1}^{\text{out}} = H_{u2}^{\text{out}} = 0$  en concordancia con [Alayo 09] y [Alayo 11]. Las demás consideraciones son las mismas a aquellas propuestas en el capítulo 3.

Con esta información, a continuación se muestran los resultados obtenidos en la referencia [Alayo 11] y los parámetros que se deben emplear para lograr un mejor ajuste teórico a dichos datos experimentales.

Tabla 5.1: En esta tabla se indican los valores del espesor ( $t$ ), campo uniaxial ( $H_u$ ) y magnetización de saturación ( $M_s$ ) correspondientes a cada capa. (Los datos fueron tomados de la ref. [Alayo 11] donde se estudia el mismo sistema en forma experimental).

Capa	$t$ (Å)	$H_u$ (Oe)	$4\pi M_s$ (kOe)	$\gamma/2\pi$ (GHz/kOe)
NiFe	50	3	9.8	2.8
Ru	24, 32, 200	-	-	-
Co	50	80	17.0	2.8
IrMn	150	-	-	-

### 5.4.1. El caso del acoplamiento cero para $t_{Ru} = 200 \text{ \AA}$

En este primer caso el espaciador de Ru tiene un espesor de  $200 \text{ \AA}$ , lo cual se considera grande en comparación al periodo de oscilación de  $J_{bl}$  (véase la figura 3.6). Por ende, el acoplamiento entre las capas ferromagnéticas se considera nulo ( $J_{bl} = J_{bc} = 0$ ). Esto quiere decir que las magnetizaciones de la capa de cobalto (FM2, capa de referencia) y la capa de NiFe (FM1, capa libre) no se encuentran acopladas. Ello conlleva a que exista una simetría de dos pliegues (*twofold*) para la capa de NiFe tal como se puede verificar al observar la figura 5.8 (parte superior), esto debido a la anisotropía uniaxial de  $H_{u1} = 3.5 \text{ Oe}$  presente en la capa de NiFe. Por otro lado, para la capa de Co (figura inferior) se observa un pico máximo en  $\alpha = 180^\circ$ . Esta forma de la curva está relacionada con un acoplamiento de intercambio directo (*exchange bias*) entre una capa FM2 y una capa AFM (bicapas de la forma FM/AFM) de la cual se puede obtener el campo de anisotropía de intercambio a través de  $H_E = (H_R(180^\circ) - H_R(0^\circ))/2$  [Pelegrini 06], donde  $H_R(180^\circ)$  y  $H_R(0^\circ)$  son los campos de resonancia medidos en  $\alpha = 180^\circ$  y  $\alpha = 0^\circ$ , respectivamente.

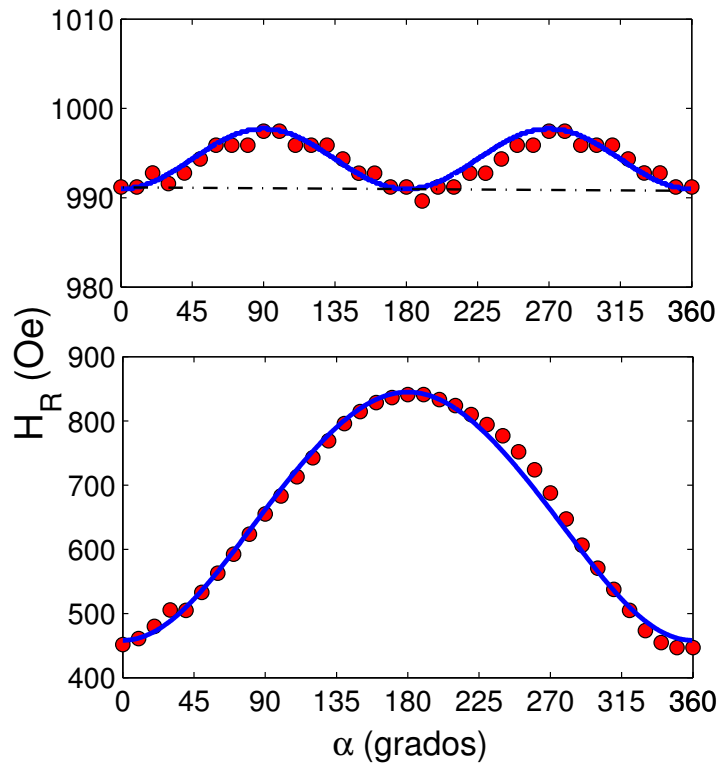


Figura 5.8: Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo de resonancia ( $H_R$ ). La línea azul representa el ajuste teórico y los puntos rojos son los datos experimentales tomados de la ref. [Alayo 11]. Los parámetros de ajuste son mostrados en la tabla 5.2.

Los ajustes realizados para este caso sin acoplamiento producen los parámetros mostrados en la tabla 5.2. Cabe señalar que estos parámetros se obtuvieron al considerar que  $H_E \ll H_W$ .

Se pueden resaltar cinco parámetros, los cuales fueron relevantes en el momento del ajuste: el campo de *exchange bias* ( $H_E$ ), los dos campos de anisotropía uniaxial  $H_{u1}$  y  $H_{u2}$  para ambas capas FM y las razones giromagnéticas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  para las capa de NiFe y Co, respectivamente. Así, el campo de anisotropía unidireccional resulta ser  $H_E = 196$  Oe; para la capa de Co, el campo uniaxial resulta en  $H_{u2} = 8$  Oe, la cual difiere bastante de su valor *bulk* de 80 Oe (véase la tabla 5.1). Por otro lado, para lograr un ajuste con un  $\chi^2$  mínimo fue necesario aumentar el valor de la razón giromagnética de  $\gamma_2/2\pi = 2.8$  GHz/kOe ( $g = 2.0$ ) a  $\gamma_2/2\pi = 2.88$  GHz/kOe ( $g = 2.057$ ), donde  $g$  es el factor de Landé. Asimismo, para la capa de NiFe el campo uniaxial fue de  $H_{u1} = 3.4$  Oe y la razón giromagnética de  $\gamma_1/2\pi = 2.9884$  GHz/kOe ( $g = 2.135$ ) respecto de su valor de 2.8 GHz/kOe. Una muestra de cómo afectan estos campos de anisotropía uniaxial a la curva del campo resonante se ve en la figura 5.9. Allí se nota que, en el caso de la capa de Co, los campos de anisotropía ( $H_{u2}$ ) pequeños prácticamente no ocasionan cambios a la forma de la curva. Esto significa que el campo de anisotropía uniaxial ( $H_E$ ) no experimenta cambios importantes. Sin embargo, a medida que  $H_{u2}$  aumenta, la curva sufre cambios drásticos pero manteniendo dos puntos simétricos en común. Por el contrario, pequeños cambios de  $H_{u1}$  originan un alargamiento importante de la curva para el caso de la capa de NiFe pero sin desplazar en ningún caso las curvas del campo resonante.

A modo de comparación, si se considera que  $H_E < H_W$  el ajuste realizado a los mismos datos experimentales muestran que el campo uniaxial para el Co cambia significativamente a  $H_{u2} = 45$  Oe con un campo efectivo de pared de dominio de  $H_W = 1.35$  kOe, todos los demás parámetros resultan tener los mismos valores a los mostrados en la tabla 5.2.

Tabla 5.2: Parámetros empleados para el ajuste mostrado en la fig. 5.8. La simulación de la relación de dispersión (véase la ec. 4.23) se realizó siguiendo el algoritmo descrito esquemáticamente en la fig. 4.3b, con  $H_E = 196$  Oe. Siendo  $H_{Keffi} = H_{ui}^{out} - 4\pi M_i$  ( $i = 1, 2$ ) el campo efectivo de alguna anisotropía fuera del plano de las capas.

Parámetros						
Capa	$t$ (Å)	$H_u$ Oe	$4\pi M_s$ (kOe)	$H_{Keff}$ (kOe)	$J_{bl} + 2J_{bc}$ $10^{-3}$ erg/cm <sup>2</sup>	$\gamma/2\pi$ (GHz/kOe)
NiFe	50	3.4	9.8	-9.8	0	2.9884
Ru	200	-	-	-		
Co	50	8.0	17.0	-17.6		2.8800
IrMn	150	-	-	-		

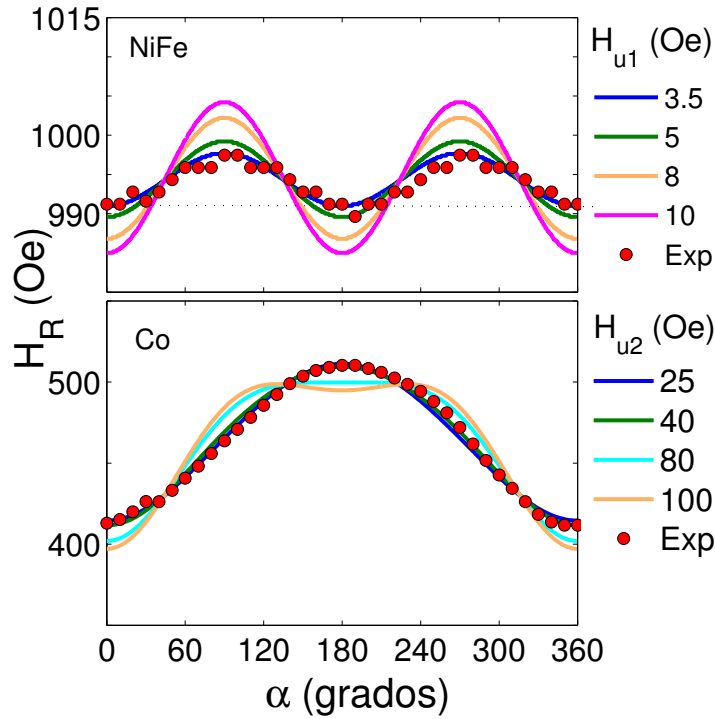


Figura 5.9: Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo de resonancia ( $H_R$ ) para diferentes valores de los campos de anisotropía uniaxial  $H_{u1}$  (capa libre, NiFe) y  $H_{u2}$  (capa fija, Co). Los puntos rojos son los mismos datos experimentales que los de la fig. 5.8. Los parámetros son aquellos mostrados en la tabla 5.2.

#### 5.4.2. El caso del acoplamiento ferromagnético para $t_{Ru} = 24 \text{ \AA}$

En este segundo caso se encontró que el espesor de  $24 \text{ \AA}$  para la capa espaciadora (Ru) da lugar a un acoplamiento ferromagnético entre la capa FM1(NiFe) y FM2(Co). Ello se corrobora con la observación de la rotura de la simetría de dos pliegues (*twofold*), respecto del acoplamiento cero, debido a la aparición de una anisotropía unidireccional producto del acoplamiento de intercambio intercapa entre FM1 y FM2. Esto quiere decir que las magnetizaciones se encuentran alineadas paralelamente apuntando en la misma dirección. La figura 5.10 muestra los datos experimentales (puntos rojos) y el ajuste realizado (línea azul) con los parámetros indicados en la tabla 5.3 donde se resumen todos los parámetros que se utilizaron en la simulación de la resonancia ferromagnética (véase la ec. 4.23) considerando que  $H_E \ll H_W$ . En dicha tabla se indica que el factor de acoplamiento de intercambio intercapa producto del ajuste de los datos experimentales fue de  $J_{bl} + 2J_{bc} = 15 \times 10^{-3} \text{ erg/cm}^2$ , lo cual indica un acoplamiento ferromagnético débil. Cabe señalar que este valor difiere muy poco respecto de  $J_{bl} + 2J_{bc} = 18 \times 10^{-3}$  obtenido por Alayo et. al. [Alayo 11], quienes obtuvieron dicho valor mediante mediciones de resonancia ferromagnética. Además, el campo de anisotropía de intercambio fue de  $H_E = 198 \text{ Oe}$ . Asimismo, el campo uniaxial  $H_{u1}$  para la capa libre de NiFe (FM1) resultó ser el mismo al de su valor *bulk*. Por el contrario, para la capa de cobalto aún permanece la discrepancia en el

factor del campo de anisotropía uniaxial de  $H_{u2} = 8$  Oe respecto de su valor *bulk* de 80 Oe, tal como se vió en el ajuste para el acoplamiento cero ( $t = 200$  Å).

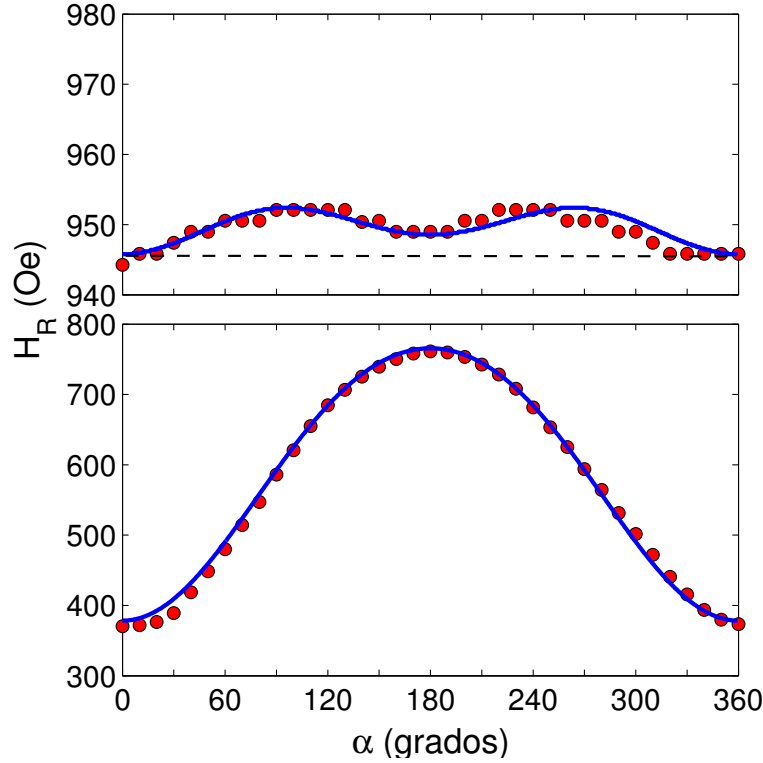


Figura 5.10: Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo de resonancia  $H_R$  donde los puntos rojos son datos experimentales tomados de la ref. [Alayo 11] y las líneas azules corresponden al ajuste realizado con los parámetros indicados en la tabla 5.3. Del ajuste se obtiene que  $J_{bl} + 2J_{bc} = 15.0 \times 10^{-3}$  erg/cm<sup>2</sup>.

Otra característica, como consecuencia del ajuste, fue la variación necesaria de las razones giromagnéticas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  para ambas capas FM1 y FM2, respectivamente, tal como se indica en la tab. 5.3. Cabe señalar que esta variación fue el único modo de lograr un ajuste óptimo al no considerar alguna anisotropía *out-plane*. Por otro lado, para tener una idea de cómo afecta  $J_{bl}$  en la dependencia angular del campo resonante, la figura 5.11 ayuda para dicho propósito. En ella se muestran varias curvas de resonancia en función de  $J_{bl}$ . Allí se ve que un aumento de  $J_{bl}$  ocasiona un desplazamiento hacia abajo, respecto del caso de acoplamiento cero (línea de color verde), de las curvas de resonancia; también se ve que a medida que aumenta la fuerza de acoplamiento desaparece por completo la simetría *twofold* en la capa de NiFe (modo acústico).

Finalmente, cabe señalar (a modo de comparación) que también se ha hecho el cálculo para  $H_E < H_W$  (modelo de Mauri), con lo cual se obtuvo  $H_{u2} = 45$  Oe para la capa de Co en contraste al valor de 8 Oe obtenido al considerar que  $H_E \ll H_W$ . Además, el campo de *exchange*

*bias* resulto ser de  $H_E = 195$  Oe con un campo efectivo de pared de dominio de  $H_W = 1.6$  kOe con  $\gamma_1/2\pi = 3.0025$  GHz/kOe y  $\gamma_2/2\pi = 2.98$  GHz/kOe. Los demás parámetros resultaron tener valores iguales a los mostrados en la tabla 5.3.

Tabla 5.3: Parámetros utilizados en el ajuste teórico, mostrado en la fig. 5.10, de los datos de FMR del sistema válvula de espín IrMn(150Å)/Co(50Å)/Ru(24Å)/NiFe(50Å) con  $H_E = 198$  Oe, siendo  $g$  el factor de Landé.

Parámetros						
Capa	$t$ (Å)	$H_u$ Oe	$4\pi M_s$ (kOe)	$H_{Keff}$ (kOe)	$J_{bl} + 2J_{bc}$ ( $10^{-3}$ erg/cm $^2$ )	$\gamma/2\pi$ (GHz/kOe)
NiFe	50	3.0	10.0	-10.0	15.0	3.0025 (g=2.145)
Ru	200	-	-	-		-
Co	50	8.0	17.0	-17.0	15.0	3.0200 (g=2.157)
IrMn	150	-	-	-		-

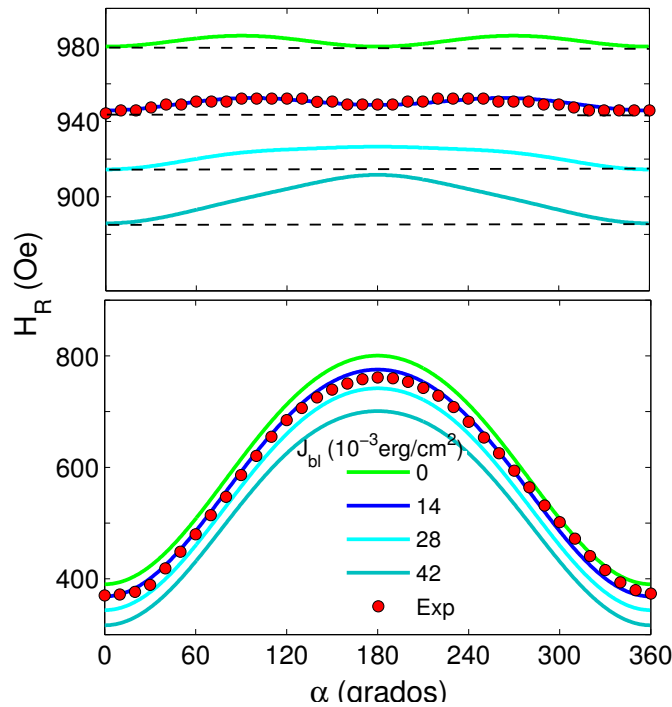


Figura 5.11: Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo de resonancia ( $H_R$ ) para diferentes valores del factor de acoplamiento bilineal  $J_{bl}$ . Los puntos rojos corresponden a los mismos datos experimentales que se muestran en la fig. 5.10. Los parámetros de ajuste se indican en la tabla 5.3.

### 5.4.3. El caso del acoplamiento antiferromagnético para $t_{Ru} = 32 \text{ \AA}$

En este último caso, el acoplamiento de intercambio intercapa que existe entre las capas FM1 y FM2 es antiferromagnético. Esto quiere decir que las magnetizaciones de las capas ferromagnéticas se encuentran alineadas antiparalelamente en ausencia de un campo externo. El ajuste realizado a los datos experimentales tomados de la ref. [Alayo 11] para  $t_{Ru} = 32 \text{ \AA}$  se muestra en la figura 5.12 y los parámetros usados se indican en la tabla 5.4. Para este caso los factores de acoplamiento bilineal y bicuadrático, como consecuencia del ajuste, fueron los siguientes:  $J_{bl} = -50.3 \times 10^{-3} \text{ erg/cm}^2$  y  $J_{bc} = 23.0 \times 10^{-3} \text{ erg/cm}^2$ . La simulación se hizo con la simplificación de que  $\phi_1 = \alpha$  ( $\phi_1 = \alpha + \pi$ ) y  $\phi_2 = \alpha + \pi$  ( $\phi_2 = \alpha$ ) para la parte superior (inferior) de la fig. 5.12. El hecho de que  $J_{bl} < 0$  y  $J_{bc} > 0$  favorecen un alineamiento antiparalelo de  $\vec{M}_1$  y  $\vec{M}_2$  conforme al diagrama de fases mostrado en la figura 3.7. Además, el campo de anisotropía unidireccional fue de  $H_E = 193 \text{ Oe}$  y las razones giromagnéticas disminuyeron con respecto del acoplamiento ferromagnético y acoplamiento cero.

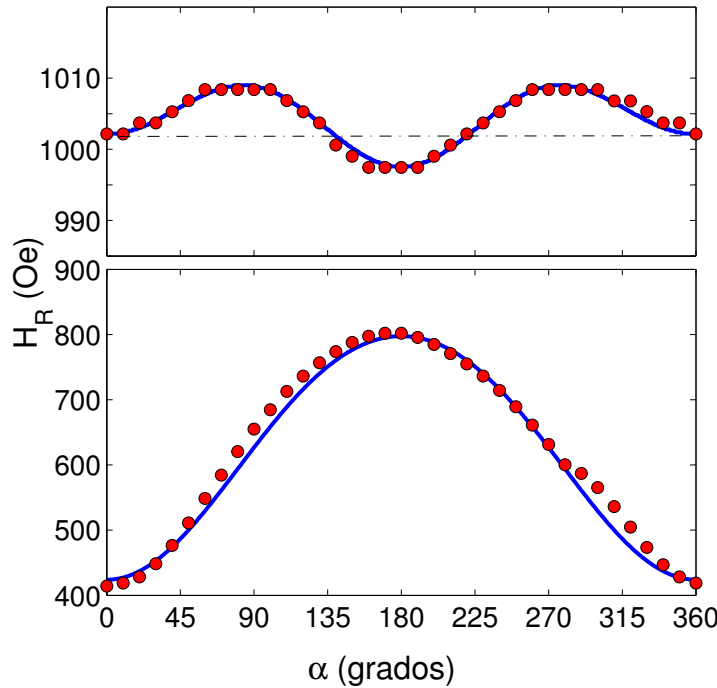


Figura 5.12: Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo de resonancia  $H_R$  para el caso del acoplamiento antiferromagnético. Los puntos rojo son los datos experimentales tomados de la ref. [Alayo 11], la línea azul es el ajuste teórico para  $J_{bl} + 2J_{bc} = -4.3 \text{ erg/cm}^2$ .

Por otro lado, la figura 5.12 muestra dos características resaltantes del acoplamiento antiferromagnético para  $t_{Ru} = 32 \text{ \AA}$ : (1) la curva de la dependencia angular del campo resonante ( $H_R$ ), para la capa acoplada de NiFe, experimenta un corrimiento hacia arriba alrededor de 11 Oe en la dirección  $\alpha = 0^\circ$  con respecto al acoplamiento cero, contrario al corrimiento en un acoplamiento



ferromagnético. Al contrario, para la capa acoplada de Co la curva de  $H_R$  versus  $\alpha$  experimenta un corrimiento de alrededor de 40 Oe hacia abajo. (2) El campo resonante  $H_R$  en la dirección  $\alpha = 180^\circ$  resulta menor al campo resonante en  $\alpha = 0^\circ$  lo cual, de acuerdo al proceso de ajuste, se puede decir que está relacionado con el factor de acoplamiento bicuadrático  $J_{bc}$ . Finalmente, la figura 5.13 muestra cómo varía el campo resonante versus el ángulo *in-plane* para diferentes fuerzas de acoplamiento bilineal ( $J_{bl}$ ).

Tabla 5.4: Los parámetros mostrados en esta tabla han sido utilizados en el ajuste del sistema IrMn(150Å)/Co(50Å)/Ru(32Å)/NiFe(50Å) el cual se muestra en la fig. 5.12. El campo de anisotropía de intercambio es  $H_E = 193$

Parámetros						
Capa	$t$ (Å)	$H_u$ Oe	$4\pi M_s$ (kOe)	$H_{Keff}$ (kOe)	$J_{bl} + 2J_{bc}$ $10^{-3}$ erg/cm <sup>2</sup>	$\gamma/2\pi$ (GHz/kOe)
NiFe	50	4.4	10.0	-10.0		2.612 (g=1.866)
Ru	32	-	-	-	-4.3	
Co	50	8.0	17.0	-17.0		2.640 (g=1.886)
IrMn	150	-	-	-		

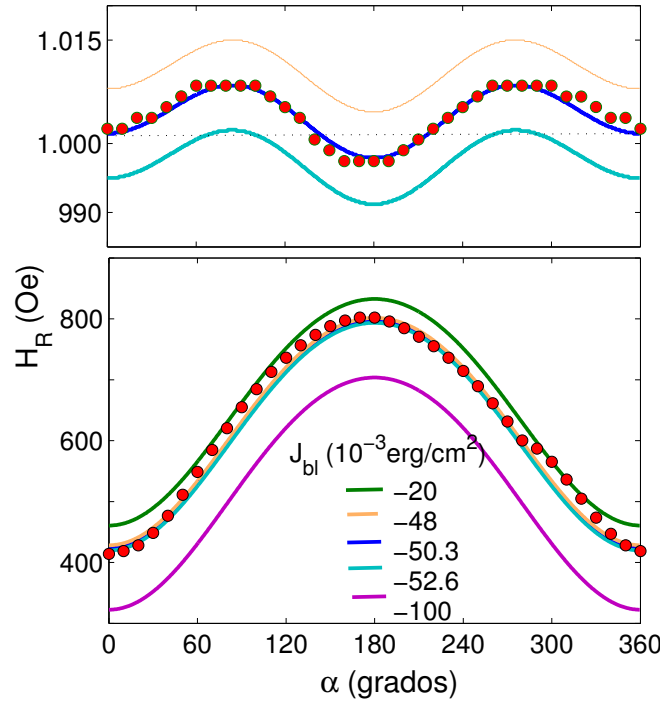


Figura 5.13: Dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo de resonancia ( $H_R$ ). Los puntos rojos corresponden a los mismos datos experimentales que se muestran en la fig. 5.12. Los parámetros de ajuste se indican en la tabla 5.4.

## 5.5. Resumen del capítulo

En este capítulo se ha estudiado las características de la relación de dispersión (modo acústico y modo óptico) para sistemas tipo válvulas de espín en situaciones diferentes, así como los parámetros determinantes en el comportamiento de la frecuencia de resonancia ( $f$ ) versus el campo externo ( $H$ ) y la dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo resonante ( $H_R$ ). Esta discusión previa abrió camino para estudiar finalmente el sistema IrMn/Co/Ru(t)/NiFe para tres espesores:  $t = 24$  Å,  $32$  Å y  $200$  Å. A continuación se muestran los aspectos más resaltantes de los resultados discutidos en este capítulo:

- Se ha investigado el efecto del campo de anisotropía de intercambio  $H_E$  junto con las fuerzas de acoplamiento ( $J_{bl}$  y  $J_{bc}$ ) sobre el comportamiento de los modos de resonancia para tres casos: acoplamiento ferromagnético ( $J_{bl} > 0$ ), acoplamiento antiferromagnético ( $J_{bl} < 0$ ) y acoplamiento cero ( $J_{bl} = 0$ ) (véase la sec. 5.1). Este estudio arrojó que para el caso del acoplamiento ferromagnético (antiferromagnético), el modo acústico corresponde a los campos altos (campos bajos) o frecuencias bajas (frecuencias altas) y el modo óptico corresponde a los campos bajos (campos altos) o frecuencias altas (frecuencias bajas).
- Los resultados han mostrado que hay un buen acuerdo entre lo obtenido en este trabajo y lo publicado en la literatura (véase por ejemplo las refs. [Layadi 05],[Azevedo 05],[Zhang 94]).

- Se ha estudiado el efecto del factor de acoplamiento bilineal  $J_{bl}$  sobre la dependencia angular ( $\alpha$ ) del campo resonante ( $H_R$ ) para el caso del acoplamiento ferromagnético (véase la sec. 5.2), de lo cual se obtuvo los siguientes resultados: para el acoplamiento cero se obtiene una curva de simetría *twofold* pero conforme aumenta la fuerza de acoplamiento, mediada a través del campo de acoplamiento  $H_{bl}$ , las curvas de resonancia experimentan un corrimiento hacia campos bajos.
- Finalmente, se ha mostrado algunos detalles experimentales del sistema válvula de espín IrMn/Co/Ru/NiFe (véase la sec. 5.4) junto con los ajustes realizados para los tres espesores de la capa espaciadora de Ru ( $t = 24 \text{ \AA}$ ,  $32 \text{ \AA}$  y  $200 \text{ \AA}$ ).



# Capítulo 6

## Conclusiones y perspectivas

### 6.1. Conclusiones

En el presente trabajo se ha estudiado la resonancia ferromagnética de un sistema tipo válvula de espín y en particular se ha aplicado el model al sistema IrMn/Co/Ru/NiFe. Para ello se ha resuelto la ecuación de Landau-Lifshitz, la cual rige la dinámica de la magnetización alrededor de las posiciones de equilibrio de la magnetización, y luego se ha hecho el estudio de la relación de dispersión. En resumen, podemos enunciar las siguientes conclusiones:

- Se ha obtenido la relación de dispersión de la resonancia ferromagnética, tomando en cuenta todas las interacciones relevantes discutidas en el capítulo 3: el acoplamiento de intercambio entre las capas ferromagnéticas, la anisotropía de intercambio entre la capa de referencia FM2 y la capa antiferromagnética AFM, una pared de dominio que se forma en la capa AFM, la anisotropía magnética y la energía de Zeeman. Así se puede obtener la dependencia entre la frecuencia de resonancia y el campo aplicado acorde con lo publicado en la literatura.
- Los ajustes realizados a los datos del campo de resonancia ( $H_R$ ) en función del ángulo *in-plane* ( $\alpha$ ) provee información acerca del factor de acoplamiento, campos de anisotropía uniaxial y el campo de *exchange bias*.
- La existencia de un acoplamiento de intercambio intercapa entre FM1 y FM2 da lugar a un corrimiento de la curva del campo resonante  $H_R$  versus el ángulo *in-plane*  $\alpha$  (para la capa libre). Este corrimiento, con respecto al acoplamiento cero, es hacia abajo para un acoplamiento ferromagnético ( $J_{bl} > 0$ ) y hacia arriba para un acoplamiento antiferromagnético ( $J_{bl} < 0$ ).
- El análisis del campo de resonancia ( $H_R$ ) en función del ángulo *in-plane* muestra que pequeños campos de acoplamiento ( $H_{bl}$ ) no originan un cambio relevante en la capa fija (FM2) pero ocasionan un rompimiento de la simetría *twofold* debido a la anisotropía unidireccional creada por el acople entre FM1 y FM2. Asimismo, ello modifica los campos de anisotropía uniaxial. Al contrario, un acoplamiento fuerte ( $H_{bl} = 40$  Oe) ocasiona que

todo el sistema se comporte como si una sola capa FM estuviera en interacción directa con una capa AFM.

- El análisis del sistema IrMn/Co/Ru(t)/NiFe para  $t = 200 \text{ \AA}$  y  $H_E \ll H_W$  muestra que el campo de anisotropía unidireccional es  $H_E = 196 \text{ Oe}$  y se caracteriza por una simetría *twofold*, siendo los campos uniaxiales de  $H_{u1} = 3.4 \text{ Oe}$  y  $H_{u2} = 8 \text{ Oe}$  para la capa de NiFe y Co, respectivamente. Al contrario, para  $H_E < H_W$  el campo de anisotropía uniaxial para el Co es de  $H_{u2} = 45 \text{ Oe}$  con un campo efectivo de pared de dominio de  $H_W = 1.35 \text{ kOe}$ .
- El análisis realizado al sistema IrMn/Co/Ru(t)/NiFe para  $t = 24 \text{ \AA}$ , considerando que  $H_E \ll H_W$ , muestra que el acoplamiento es ferromagnético con  $J_{bl} + 2J_{bc} = 15 \text{ erg/cm}^2$ ,  $H_E = 198 \text{ Oe}$ ,  $H_{u1} = 3 \text{ Oe}$  y  $H_{u2} = 8 \text{ Oe}$ . Para el caso en el que se incluye el modelo de Mauri ( $H_E < H_W$ ) los ajustes indican que  $H_{u2} = 45 \text{ Oe}$  y  $H_E = 195 \text{ Oe}$ , siendo el campo efectivo de pared de dominio de  $H_W = 1.6 \text{ kOe}$ .
- El análisis del sistema IrMn/Co/Ru(t)/NiFe para  $t = 32 \text{ \AA}$  indica que la curva de FMR experimenta un corrimiento hacia arriba para la capa acoplada de NiFe, siendo  $J_{bl} + 2J_{bc} = -4.3 \text{ erg/cm}^2$ .
- El efecto de un aumento/disminución de las razones giromagnéticas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  consiste en desplazar hacia abajo/arriba las curvas de campo resonante versus el ángulo *in-plane*. Sin embargo, si se mantienen constantes estos parámetros este mismo efecto se obtiene al considerar la existencia de alguna anisotropía *out-plane* caracterizado por  $H_{u1}^{out}$  y  $H_{u2}^{out}$ .

## 6.2. Perspectivas

Los resultados obtenidos en el presente trabajo tienen un potencial que puede servir como base para el estudio de sistemas multicapa, relacionadas, ya que muchos estudios sobre resonancia ferromagnética en multicapas magnéticas son publicados siguiendo una ruta similar a la que se siguió en la presente tesis. Dentro de las propiedades magnéticas que podrían calcularse en base al modelo fenomenológico propuesto son:

- La magnetorresistencia gigante que podría simularse en base al modelo de la energía libre establecida en la Ec. 4.9 en el que se podría añadir o quitar términos dependiendo del sistema multicapa bajo estudio.
- Estudio de multicapas magnéticas aperiódicas. Por ejemplo una propuesta tentativa para un trabajo futuro es aplicar estos resultados a una multicapa aperiódica; es decir, introducir aperiocidad en el sentido que el espesor de la capa no magnética NM puede variar de forma aperiódica, tal vez siguiendo la secuencia de Fibonacci. Esto es posible dado que la matriz de energía, Ec. 4.23, muestra un patrón recurrente cuya solución para  $n$  capas ferromagnéticas podría generalizarse.

- También puede aplicarse este estudio a la obtención de las constantes de anisotropías magnéticas en multicamadas tipo  $[\text{Co}/\text{Au}]_n$  así como el factor g-Landé, entre otros parámetros.





# Apéndice A

## Complemento sobre detalles de la determinación de la relación de dispersión

En este apéndice se detalla el procedimiento analítico que se siguió para la obtención de la relación de dispersión mostrada en el capítulo 4. A grandes razgos, la secuencia matemática es como sigue: primero, se transforma la forma cartesiana de la ecuación de Landau-Lifshitz en coordenadas esféricas; luego, se hace una expansión en serie de Taylor de la función de energía hasta el segundo orden; finalmente, se resuelve la forma esférica de la ecuación de Landau-Lifshitz cuya solución se expresa en seis ecuaciones acopladas.

### A.1. Transformación de la ecuación de Landau-Lifshitz a coordenadas esféricas

En este primer apartado se utilizará la Ec. 4.19 con el objetivo de transformarla en coordenadas esféricas. Para ello se va a trabajar, por separado, los dos miembros de la Ec. 4.19. En el primer miembro la magnetización  $\vec{M}_i$  se puede expresar (véase la fig. 2.1) como:

$$\vec{M}_i = M_i(\sin \theta_i \cos \phi_i \hat{i} + \sin \theta_i \sin \phi_i \hat{j} + \cos \phi_i \hat{k}).$$

Además, teniendo en cuenta que el módulo de la magnetización permanece constante ( $|\vec{M}_i| = M_i = cte.$ ), al tomar la derivada respecto al tiempo ésta no afecta a  $M_i$ , quedando:

$$\frac{\partial \vec{M}_i}{\partial t} = M_i \left( \frac{\partial}{\partial t} (\sin \theta_i \cos \phi_i) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial t} (\sin \theta_i \sin \phi_i) \hat{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\cos \phi_i) \hat{k} \right).$$

De acuerdo a la tercera consideración, indicada en la sección 4.4, los ángulos  $\theta_i$  y  $\phi_i$  dependen del tiempo, por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}_i}{\partial t} &= M_i \left( \frac{\partial(\sin \theta_i)}{\partial t} \cos \phi_i \hat{i} + \sin \theta_i \frac{\partial(\cos \phi_i)}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial(\sin \theta_i)}{\partial t} \sin \phi_i \hat{j} + \sin \theta_i \frac{\partial(\sin \phi_i)}{\partial t} \hat{j} + \frac{\partial(\cos \phi_i)}{\partial t} \hat{k} \right) \\ &= M_i (\cos \theta_i \cos \phi_i \dot{\theta}_i \hat{i} - \overline{\sin \theta_i} \sin \phi_i \dot{\phi}_i \hat{i} + \cos \theta_i \sin \phi_i \dot{\theta}_i \hat{j} + \overline{\sin \theta_i} \cos \phi_i \dot{\phi}_i \hat{j} - \sin \theta_i \dot{\phi}_i \hat{k}). \end{aligned}$$

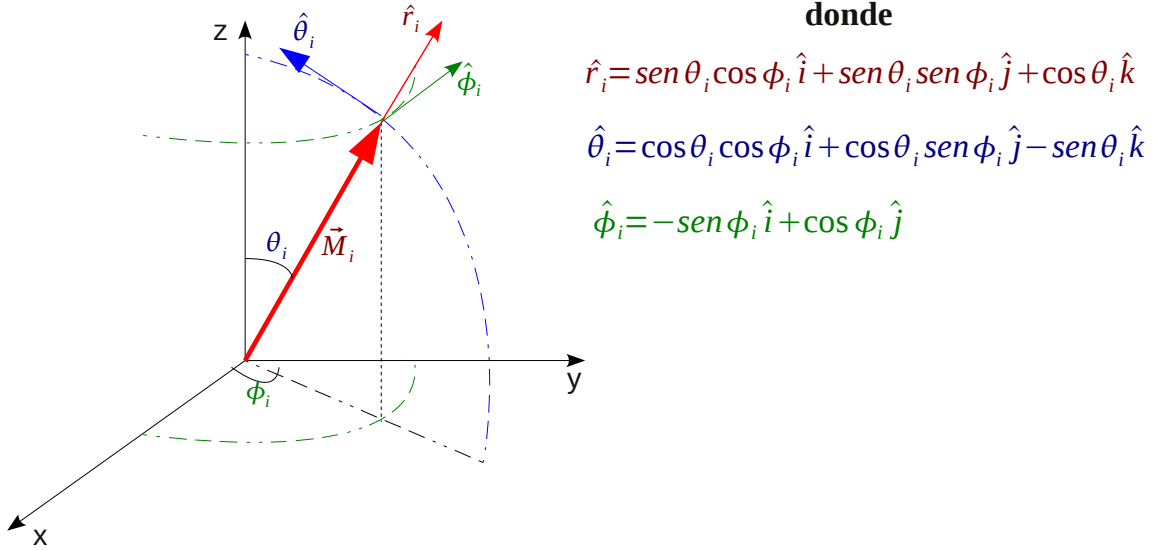


Figura A.1: Representación de un sistema de coordenadas esféricas en el que se muestran los vectores unitarios  $\hat{r}_i$ ,  $\hat{\theta}_i$  y  $\hat{\phi}_i$  en función de los vectores unitarios  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$ .

Agrupando los términos subrayados se obtiene una expresión en la que se identifica los vectores unitarios  $\hat{\theta}_i$  y  $\hat{\phi}_i$  propios del sistema de coordenadas esférico mostrado en la figura A.1; es decir,

$$\frac{\partial \vec{M}_i}{\partial t} = M_i \left( \underbrace{(\cos \theta_i \cos \phi_i \hat{i} + \cos \theta_i \sin \phi_i \hat{j} - \sin \theta_i \hat{k})}_{\hat{\theta}_i} \dot{\theta}_i + \underbrace{(-\sin \phi_i \hat{i} + \cos \phi_i \hat{j})}_{\hat{\phi}_i} \sin \theta_i \dot{\phi}_i \right). \quad (\text{A.1})$$

Finalmente, la derivada de la magnetización queda expresada como

$$\frac{\partial \vec{M}_i}{\partial t} = M_i \dot{\theta}_i \hat{\theta}_i + M_i \sin \theta_i \dot{\phi}_i \hat{\phi}_i. \quad (\text{A.2})$$

Una vez obtenido el primer miembro de la ecuación de Landau-Lifshitz, Ec. (4.19), en coordenadas esféricas, se prosigue a trabajar con el segundo miembro  $(-\gamma/t_i) \vec{M}_i \times \nabla_M E$  transformándolo a coordenadas esféricas. Para ello utilizaremos el gradiente expresado en coordenadas esféricas; es decir,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi},$$

en el que podemos considerar (véase la fig. A.1) que el vector magnetización es reemplazado por el vector de posición donde  $|\vec{r}_i| = |\vec{M}_i|$  por lo que el segundo miembro de la Ec. (4.19) quedaría como:

$$-\frac{\gamma}{t_i} \vec{M}_i \times \nabla_M E = -\frac{\gamma}{t_i} (M_i \hat{r}) \times \left( \frac{\partial E}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{M_i} \frac{\partial E}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{M_i \sin \theta} \frac{\partial E}{\partial \phi} \hat{\phi} \right). \quad (\text{A.3})$$

Al realizar el producto vectorial debemos tener en consideración que, de acuerdo a la Fig. A.1, la relación entre los vectores unitarios esféricos es:

$$\hat{r}_i = \hat{\phi}_i \times \hat{\theta}_i \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{\theta}_i = \hat{r}_i \times \hat{\phi}_i \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{\phi}_i = \hat{\theta}_i \times \hat{r}_i, \quad (\text{A.6})$$

por lo que la Ec. (A.3) queda de la siguiente manera:

$$-\frac{\gamma}{t_i} \vec{M}_i \times \nabla_M E = -\frac{\gamma}{t_i} M_i \left( -\frac{1}{M_i} \frac{\partial E}{\partial \theta_i} \hat{\phi}_i + \frac{1}{M_i \sin \theta} \frac{\partial E}{\partial \phi} \hat{\theta}_i \right), \quad (\text{A.7})$$

quedando finalmente:

$$-\frac{\gamma}{t_i} \vec{M}_i \times \nabla_M E = \frac{\gamma}{t_i} \frac{\partial E}{\partial \theta_i} \hat{\phi}_i - \frac{\gamma}{t_i \sin \theta} \frac{\partial E}{\partial \phi} \hat{\theta}_i. \quad (\text{A.8})$$

Ahora ya se puede igualar la Ec. A.2 con esta Ec. A.8:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}_i}{\partial t} &= -\frac{\gamma}{t_i} \vec{M}_i \times \nabla_M E \\ \underline{M_i \dot{\theta}_i \hat{\theta}_i} + M_i \sin \theta_i \dot{\phi}_i \hat{\phi}_i &= \frac{\gamma}{t_i} \frac{\partial E}{\partial \theta_i} \hat{\phi}_i - \underline{\frac{\gamma}{t_i \sin \theta_i} \frac{\partial E}{\partial \phi_i} \hat{\theta}_i}. \end{aligned}$$

Igualando los términos semejantes subrayados, obtenemos finalmente lo que buscábamos: la ecuación de Landau-Lifshitz en coordenadas esféricas; es decir,

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = -\frac{\gamma}{t_i M_i \sin \theta_i} \frac{\partial E}{\partial \phi_i} \quad (\text{A.9a})$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = \frac{\gamma}{t_i M_i \sin \theta_i} \frac{\partial E}{\partial \theta_i}. \quad (\text{A.9b})$$

El siguiente paso es determinar la energía libre total  $E$  como una expansión en serie de Taylor con aproximación a la segunda potencia, la cual se describe a continuación.

## A.2. Expansión en serie de Taylor al segundo orden de la función de energía libre

En este apartado se debe tener en cuenta que la energía depende de seis variables:

$$E = E(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \theta_3, \phi_3)$$

es decir, que va a ser una expansión multivariable que viene dada por:

$$\begin{aligned}
 E &= E(\theta_1^0, \phi_1^0, \theta_2^0, \phi_2^0, \theta_3^0, \phi_3^0) + \frac{\partial E}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1^0} (\theta_1 - \theta_1^0) + \frac{\partial E}{\partial \phi_1} \Big|_{\phi_1^0} (\phi_1 - \phi_1^0) + \frac{\partial E}{\partial \theta_2} \Big|_{\theta_2^0} (\theta_2 - \theta_2^0) + \frac{\partial E}{\partial \phi_2} \Big|_{\phi_2^0} (\phi_2 - \phi_2^0) \\
 &+ \frac{\partial E}{\partial \theta_3} \Big|_{\theta_3^0} (\theta_3 - \theta_3^0) + \frac{\partial E}{\partial \phi_3} \Big|_{\phi_3^0} (\phi_3 - \phi_3^0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1^2} \Big|_{\theta_1^0} (\theta_1 - \theta_1^0)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1^2} \Big|_{\phi_1^0} (\phi_1 - \phi_1^0)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2^2} \Big|_{\theta_2^0} (\theta_2 - \theta_2^0)^2 \\
 &+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2^2} \Big|_{\phi_2^0} (\phi_2 - \phi_2^0)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_3^2} \Big|_{\theta_3^0} (\theta_3 - \theta_3^0)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_3^2} \Big|_{\phi_3^0} (\phi_3 - \phi_3^0)^2 \\
 &+ \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \partial \phi_1} \Big|_{\theta_1^0, \phi_1^0} (\theta_1 - \theta_1^0)(\phi_1 - \phi_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \Big|_{\theta_1^0, \theta_2^0} (\theta_1 - \theta_1^0)(\theta_2 - \theta_2^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \partial \phi_2} \Big|_{\theta_1^0, \phi_2^0} (\theta_1 - \theta_1^0)(\phi_2 - \phi_2^0) \\
 &+ \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \partial \theta_3} \Big|_{\theta_1^0, \theta_3^0} (\theta_1 - \theta_1^0)(\theta_3 - \theta_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \partial \phi_3} \Big|_{\theta_1^0, \phi_3^0} (\theta_1 - \theta_1^0)(\phi_3 - \phi_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \theta_2} \Big|_{\phi_1^0, \theta_2^0} (\phi_1 - \phi_1^0)(\theta_2 - \theta_2^0) \\
 &+ \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} \Big|_{\phi_1^0, \phi_2^0} (\phi_1 - \phi_1^0)(\phi_2 - \phi_2^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \theta_3} \Big|_{\phi_1^0, \theta_3^0} (\phi_1 - \phi_1^0)(\theta_3 - \theta_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \phi_3} \Big|_{\phi_1^0, \phi_3^0} (\phi_1 - \phi_1^0)(\phi_3 - \phi_3^0) \\
 &+ \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \partial \phi_2} \Big|_{\theta_2^0, \phi_2^0} (\theta_2 - \theta_2^0)(\phi_2 - \phi_2^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \partial \theta_3} \Big|_{\theta_2^0, \theta_3^0} (\theta_2 - \theta_2^0)(\theta_3 - \theta_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \partial \phi_3} \Big|_{\theta_2^0, \phi_3^0} (\theta_2 - \theta_2^0)(\phi_3 - \phi_3^0) \\
 &+ \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2 \partial \theta_3} \Big|_{\phi_2^0, \theta_3^0} (\phi_2 - \phi_2^0)(\theta_3 - \theta_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2 \partial \phi_3} \Big|_{\phi_2^0, \phi_3^0} (\phi_2 - \phi_2^0)(\phi_3 - \phi_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_3 \partial \phi_3} \Big|_{\theta_3^0, \phi_3^0} (\theta_3 - \theta_3^0)(\phi_3 - \phi_3^0) + \dots \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

siendo  $\theta_i^0, \phi_i^0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) los ángulos de equilibrio que se obtienen al aplicar el principio de minimización de la energía libre dada por:

$$\frac{\partial E}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta_i^0} = \frac{\partial E}{\partial \phi_i} \Big|_{\phi_i^0} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Por esta razón todos los términos de primer orden (color rojo) en la expansión en serie de Taylor, Ec. (A.10), son nulos. Así, solo quedan los términos azules. Los términos de mayor orden se consideran muy pequeños así que se pueden despreciar. Finalmente la energía libre queda expresada como

$$\begin{aligned}
 E &= E(\theta_1^0, \phi_1^0, \theta_2^0, \phi_2^0, \theta_3^0, \phi_3^0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1^2} \Big|_{\theta_1^0} (\theta_1 - \theta_1^0)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1^2} \Big|_{\phi_1^0} (\phi_1 - \phi_1^0)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2^2} \Big|_{\theta_2^0} (\theta_2 - \theta_2^0)^2 \\
 &+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2^2} \Big|_{\phi_2^0} (\phi_2 - \phi_2^0)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_3^2} \Big|_{\theta_3^0} (\theta_3 - \theta_3^0)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_3^2} \Big|_{\phi_3^0} (\phi_3 - \phi_3^0)^2 \\
 &+ \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \partial \phi_1} \Big|_{\theta_1^0, \phi_1^0} (\theta_1 - \theta_1^0)(\phi_1 - \phi_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \Big|_{\theta_1^0, \theta_2^0} (\theta_1 - \theta_1^0)(\theta_2 - \theta_2^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \partial \phi_2} \Big|_{\theta_1^0, \phi_2^0} (\theta_1 - \theta_1^0)(\phi_2 - \phi_2^0) \\
 &+ \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \partial \theta_3} \Big|_{\theta_1^0, \theta_3^0} (\theta_1 - \theta_1^0)(\theta_3 - \theta_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \partial \phi_3} \Big|_{\theta_1^0, \phi_3^0} (\theta_1 - \theta_1^0)(\phi_3 - \phi_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \theta_2} \Big|_{\phi_1^0, \theta_2^0} (\phi_1 - \phi_1^0)(\theta_2 - \theta_2^0) \\
 &+ \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} \Big|_{\phi_1^0, \phi_2^0} (\phi_1 - \phi_1^0)(\phi_2 - \phi_2^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \theta_3} \Big|_{\phi_1^0, \theta_3^0} (\phi_1 - \phi_1^0)(\theta_3 - \theta_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \phi_3} \Big|_{\phi_1^0, \phi_3^0} (\phi_1 - \phi_1^0)(\phi_3 - \phi_3^0) \\
 &+ \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \partial \phi_2} \Big|_{\theta_2^0, \phi_2^0} (\theta_2 - \theta_2^0)(\phi_2 - \phi_2^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \partial \theta_3} \Big|_{\theta_2^0, \theta_3^0} (\theta_2 - \theta_2^0)(\theta_3 - \theta_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \partial \phi_3} \Big|_{\theta_2^0, \phi_3^0} (\theta_2 - \theta_2^0)(\phi_3 - \phi_3^0) \\
 &+ \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2 \partial \theta_3} \Big|_{\phi_2^0, \theta_3^0} (\phi_2 - \phi_2^0)(\theta_3 - \theta_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2 \partial \phi_3} \Big|_{\phi_2^0, \phi_3^0} (\phi_2 - \phi_2^0)(\phi_3 - \phi_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_3 \partial \phi_3} \Big|_{\theta_3^0, \phi_3^0} (\theta_3 - \theta_3^0)(\phi_3 - \phi_3^0)
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

### A.2.1. La ecuación de Landau-Lifshitz para la capa FM1 ( $i = 1$ )

Con la expresión para la energía libre total ya determinada y considerando que los ángulos  $\theta_i$  y  $\phi_i$  varían de forma exponencial como ya se acotó previamente (criterio asumido 3), estamos listos para resolver la Ec. (A.9a) y la Ec. (A.9b). Para ello se reemplazará con  $i = 1$  (correspondiente a la magnetización de la capa FM1); es decir,

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -\frac{\gamma}{t_1 M_1 \sin \theta_1} \frac{\partial E}{\partial \phi_1}. \quad (\text{A.12})$$

Aquí,  $\theta_1 = \theta_1^0 + \Delta \theta_1 \exp(i\omega t)$  por lo que su derivada viene dada por

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = i\omega \Delta \theta_1 \exp(i\omega t). \quad (\text{A.13})$$

Por otro lado, de la Ec. A.11 obtenemos la derivada de la energía libre  $E$  con respecto a  $\phi_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \phi_1} = & \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1^2}(\phi_1 - \phi_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \partial \phi_1}(\theta_1 - \theta_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \theta_2}(\theta_2 - \theta_2^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \phi_2}(\phi_2 - \phi_2^0) \\ & + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \theta_3}(\theta_3 - \theta_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \phi_3}(\phi_3 - \phi_3^0) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Esta ecuación, junto con la ec. (A.13), la reemplazamos en la ec. (A.12). Pero antes, reemplazamos las segundas derivadas de  $E$  con otra notación más corta; es decir,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \partial \phi_1} = E_{\theta_1 \phi_1}.$$

con ello,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} &= -\frac{\gamma}{t_1 M_1 \sin \theta_1} \frac{\partial E}{\partial \phi_1} \\ i\omega \Delta \theta_1 \exp(i\omega t) &= -\frac{\gamma}{t_1 M_1 \sin \theta_1} (E_{\phi_1 \phi_1} \Delta \phi_1 \exp(i\omega t) + E_{\theta_1 \phi_1} \Delta \theta_1 \exp(i\omega t) \\ &\quad + E_{\phi_1 \theta_2} \Delta \theta_2 \exp(i\omega t) + E_{\phi_1 \phi_2} \Delta \phi_2 \exp(i\omega t) \\ &\quad + E_{\phi_1 \theta_3} \Delta \theta_3 \exp(i\omega t) + E_{\phi_1 \phi_3} \Delta \phi_3 \exp(i\omega t)). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Factorizando los exponenciales  $\exp(i\omega t)$  de ambos miembros tenemos

$$i\omega \Delta \theta_1 = -\frac{\gamma}{t_1 M_1 \sin \theta_1} (E_{\phi_1 \phi_1} \Delta \phi_1 + E_{\theta_1 \phi_1} \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \theta_2} \Delta \theta_2 + E_{\phi_1 \phi_2} \Delta \phi_2 + E_{\phi_1 \theta_3} \Delta \theta_3 + E_{\phi_1 \phi_3} \Delta \phi_3).$$

Luego pasamos el primer miembro hacia el segundo, obteniendo:

$$(E_{\theta_1 \phi_1} + \frac{i\omega t_1 M_1 \sin \theta_1}{\gamma}) \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \phi_1} \Delta \phi_1 + E_{\phi_1 \theta_2} \Delta \theta_2 + E_{\phi_1 \phi_2} \Delta \phi_2 + E_{\phi_1 \theta_3} \Delta \theta_3 + E_{\phi_1 \phi_3} \Delta \phi_3 = 0. \quad (\text{A.16})$$

Esta ecuación corresponde a la solución de la Ec. (A.9a) para  $i = 1$ .

Para la solución de la ec. (A.9b) seguiremos el mismo procedimiento seguido líneas arriba. Partimos de dicha ecuación:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{\gamma}{t_1 M_1 \sin \theta_1} \frac{\partial E}{\partial \theta_1},$$

en el que  $\phi_1 = \phi_1^0 + \Delta \theta_1 \exp(i\omega t)$ . Derivando tenemos:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = i\omega \Delta \theta_1 \exp(i\omega t). \quad (\text{A.17})$$

Ahora obtenemos la derivada de  $E$  con respecto a  $\theta_1$  a partir de la Ec. (A.11); es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \theta_1} = & \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1^2} (\theta_1 - \theta_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \phi_1} (\phi_1 - \phi_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \theta_2} (\theta_2 - \theta_2^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \phi_2} (\phi_2 - \phi_2^0) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \theta_3} (\theta_3 - \theta_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \phi_3} (\phi_3 - \phi_3^0) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

y hacemos uso de la notación corta para la segunda derivada de la energía y de la ec. (4.21) por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} &= \frac{\gamma}{t_1 M_1 \sin \theta_1} \frac{\partial E}{\partial \theta_1} \\ i\omega \Delta \phi_1 \exp(i\omega t) &= \frac{\gamma}{t_1 M_1 \sin \theta_1} (E_{\theta_1 \theta_1} \Delta \theta_1 \exp(i\omega t) + E_{\theta_1 \phi_1} \Delta \phi_1 \exp(i\omega t) \\ &\quad + E_{\theta_1 \theta_2} \Delta \theta_2 \exp(i\omega t) + E_{\theta_1 \phi_2} \Delta \phi_2 \exp(i\omega t) \\ &\quad + E_{\theta_1 \theta_3} \Delta \theta_3 \exp(i\omega t) + E_{\theta_1 \phi_3} \Delta \phi_3 \exp(i\omega t)). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Factorizando el término  $\exp(i\omega t)$  del primer y segundo miembro tenemos:

$$\frac{i\omega t_1 M_1 \sin \theta_1}{\gamma} \Delta \phi_1 = E_{\theta_1 \theta_1} \Delta \theta_1 + E_{\theta_1 \phi_1} \Delta \phi_1 + E_{\theta_1 \theta_2} \Delta \theta_2 + E_{\theta_1 \phi_2} \Delta \phi_2 + E_{\theta_1 \theta_3} \Delta \theta_3 + E_{\theta_1 \phi_3} \Delta \phi_3.$$

Luego, ordenando en forma conveniente con referencia a la ec. (A.16) obtenemos:

$$E_{\theta_1 \theta_1} \Delta \theta_1 + (E_{\theta_1 \phi_1} - \frac{i\omega t_1 M_1 \sin \theta_1}{\gamma}) \Delta \phi_1 + E_{\theta_1 \theta_2} \Delta \theta_2 + E_{\theta_1 \phi_2} \Delta \phi_2 + E_{\theta_1 \theta_3} \Delta \theta_3 + E_{\theta_1 \phi_3} \Delta \phi_3 = 0, \quad (\text{A.20})$$

que es la solución de la ec. (A.9b) para  $i = 1$ .

### A.2.2. La ecuación de Landau-Lifshitz para la capa FM2 ( $i = 2$ )

Observando que la ecuación de Landau-Lifshitz, en coordenadas esféricas (Ec. (A.9)) y la expresión de la energía libre  $E$  (Ec. (A.11)) son simétricas con respecto a los ángulos  $\theta_1, \phi_1$ ;  $\theta_2, \phi_2$  y  $\theta_3, \phi_3$  podemos deducir fácilmente expresiones parecidas a la Ec. (A.16) y a la Ec.

(A.20). No obstante, a continuación se describirá paso a paso la obtención de dichas expresiones para  $i = 2$ . Así, se tiene que:

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -\frac{\gamma}{t_2 M_2 \sin \theta_2} \frac{\partial E}{\partial \phi_2},$$

donde  $\theta_2 = \theta_2^0 + \Delta \theta_2 \exp(i\omega t)$ , tal que su derivada

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = i\omega \Delta \theta_2 \exp(i\omega t). \quad (\text{A.21})$$

La derivada de  $E$  respecto de  $\phi_2$  la obtenemos a partir de la Ec. (A.11); es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \phi_2} = & \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2^2} (\phi_2 - \phi_2^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \phi_2} (\theta_1 - \theta_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \phi_2} (\phi_1 - \phi_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \phi_2} (\theta_2 - \theta_2^0) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2 \theta_3} (\theta_3 - \theta_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2 \phi_3} (\phi_3 - \phi_3^0) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Reemplazamos estas derivadas en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} &= -\frac{\gamma}{t_2 M_2 \sin \theta_2} \frac{\partial E}{\partial \phi_2} \\ i\omega \Delta \theta_2 \exp(i\omega t) &= -\frac{\gamma}{t_2 M_2 \sin \theta_2} (E_{\phi_2 \phi_2} \Delta \phi_2 \exp(i\omega t) + E_{\theta_1 \phi_2} \Delta \theta_1 \exp(i\omega t) \\ &\quad + E_{\phi_1 \phi_2} \Delta \phi_1 \exp(i\omega t) + E_{\theta_2 \phi_2} \Delta \theta_2 \exp(i\omega t) \\ &\quad + E_{\phi_2 \theta_3} \Delta \theta_3 \exp(i\omega t) + E_{\phi_2 \phi_3} \Delta \phi_3 \exp(i\omega t)). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Luego, factorizando los términos exponenciales en el primer y segundo miembro tenemos:

$$-\frac{i\omega t_2 M_2 \sin \theta_2}{\gamma} \Delta \theta_2 = E_{\phi_2 \phi_2} \Delta \phi_2 + E_{\theta_1 \phi_2} \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \phi_2} \Delta \phi_1 + E_{\theta_2 \phi_2} \Delta \theta_2 + E_{\phi_2 \theta_3} \Delta \theta_3 + E_{\phi_2 \phi_3} \Delta \phi_3.$$

Ordenando convenientemente como en los casos anteriores, obtenemos finalmente:

$$E_{\theta_1 \phi_2} \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \phi_2} \Delta \phi_1 + (E_{\theta_2 \phi_2} + \frac{i\omega t_2 M_2 \sin \theta_2}{\gamma}) \Delta \theta_2 + E_{\phi_2 \phi_2} \Delta \phi_2 + E_{\phi_2 \theta_3} \Delta \theta_3 + E_{\phi_2 \phi_3} \Delta \phi_3 = 0. \quad (\text{A.24})$$

Para la segunda parte usaremos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \frac{\gamma}{t_2 M_2 \sin \theta_2} \frac{\partial E}{\partial \theta_2},$$

en el que  $\phi_2 = \phi_2^0 + \Delta \phi_2 \exp(i\omega t)$ . Así, su derivada se expresa como:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = i\omega \Delta \phi_2 \exp(i\omega t). \quad (\text{A.25})$$

La derivada de  $E$  con respecto a  $\theta_2$  la obtenemos de la Ec. (A.11); es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \theta_2} = & \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2^2} (\theta_2 - \theta_2^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \theta_2} (\theta_1 - \theta_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \theta_2} (\phi_1 - \phi_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \phi_2} (\phi_2 - \phi_2^0) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \theta_3} (\theta_3 - \theta_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \phi_3} (\phi_3 - \phi_3^0) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Reemplazando estas derivadas tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} &= \frac{\gamma}{t_2 M_2 \sin \theta_2} \frac{\partial E}{\partial \theta_2} \\ i\omega \Delta \phi_2 \exp(i\omega t) &= \frac{\gamma}{t_2 M_2 \sin \theta_2} (E_{\theta_2 \theta_2} \Delta \theta_2 \exp(i\omega t) + E_{\theta_1 \theta_2} \Delta \theta_1 \exp(i\omega t) \\ &\quad + E_{\phi_1 \theta_2} \Delta \phi_1 \exp(i\omega t) + E_{\theta_2 \phi_2} \Delta \phi_2 \exp(i\omega t) \\ &\quad + E_{\theta_2 \theta_3} \Delta \theta_3 \exp(i\omega t) + E_{\theta_2 \phi_3} \Delta \phi_3 \exp(i\omega t)). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Luego, factorizando los términos exponenciales en cada miembro tenemos

$$\frac{i\omega t_2 M_2 \sin \theta_2}{\gamma} \Delta \phi_2 = E_{\theta_2 \theta_2} \Delta \theta_2 + E_{\theta_1 \theta_2} \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \theta_2} \Delta \phi_1 + E_{\theta_2 \phi_2} \Delta \phi_2 + E_{\theta_2 \theta_3} \Delta \theta_3 + E_{\theta_2 \phi_3} \Delta \phi_3.$$

Finalmente, agrupando de modo conveniente tenemos:

$$E_{\theta_1 \theta_2} \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \theta_2} \Delta \phi_1 + E_{\theta_2 \theta_2} \Delta \theta_2 + (E_{\theta_2 \phi_2} - \frac{i\omega t_2 M_2 \sin \theta_2}{\gamma}) \Delta \phi_2 + E_{\theta_2 \theta_3} \Delta \theta_3 + E_{\theta_2 \phi_3} \Delta \phi_3 = 0. \quad (\text{A.28})$$

### A.2.3. La ecuación de Landau-Lifshitz para la subred AFM ( $i = 3$ )

De manera análoga a los casos anteriores, primero se utiliza la ec. (A.9a) para  $i = 3$ ; es decir,

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial t} = -\frac{\gamma}{t_3 M_3 \sin \theta_3} \frac{\partial E}{\partial \phi_3},$$

donde  $\theta_3 = \theta_3^0 + \Delta \theta_3 \exp(i\omega t)$ , tal que su derivada es:

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial t} = i\omega \Delta \theta_3 \exp(i\omega t). \quad (\text{A.29})$$

La derivada de la energía libre  $E$  con respecto a  $\phi_3$  la obtenemos de la Ec. (A.11); es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \phi_3} = & \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_3^2} (\phi_3 - \phi_3^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \phi_3} (\theta_1 - \theta_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \phi_3} (\phi_1 - \phi_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \phi_3} (\theta_2 - \theta_2^0) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2 \phi_3} (\phi_2 - \phi_2^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_3 \phi_3} (\theta_3 - \theta_3^0) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$



Reemplazamos la derivada de  $E$  y la derivada de  $\theta_3$  en:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_3}{\partial t} &= -\frac{\gamma}{t_3 M_3 \sin \theta_3} \frac{\partial E}{\partial \phi_3} \\ i\omega \Delta \theta_3 \exp(i\omega t) &= -\frac{\gamma}{t_3 M_3 \sin \theta_3} (E_{\phi_3 \phi_3} \Delta \phi_3 \exp(i\omega t) + E_{\theta_1 \phi_3} \Delta \theta_1 \exp(i\omega t) \\ &\quad + E_{\phi_1 \phi_3} \Delta \phi_1 \exp(i\omega t) + E_{\theta_2 \phi_3} \Delta \theta_2 \exp(i\omega t) \\ &\quad + E_{\phi_2 \phi_3} \Delta \phi_2 \exp(i\omega t) + E_{\theta_3 \phi_3} \Delta \theta_3 \exp(i\omega t)).\end{aligned}\quad (\text{A.31})$$

Ahora, factorizamos los exponenciales  $\exp(i\omega t)$  quedando:

$$-\frac{i\omega t_3 M_3 \sin \theta_3}{\gamma} \Delta \theta_3 = E_{\phi_3 \phi_3} \Delta \phi_3 + E_{\theta_1 \phi_3} \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \phi_3} \Delta \phi_1 + E_{\theta_2 \phi_3} \Delta \theta_2 + E_{\phi_2 \phi_3} \Delta \phi_2 + E_{\theta_3 \phi_3} \Delta \theta_3.$$

Agrupando de modo conveniente como en los cálculos anteriores, obtenemos:

$$E_{\theta_1 \phi_3} \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \phi_3} \Delta \phi_1 + E_{\theta_2 \phi_3} \Delta \theta_2 + E_{\phi_2 \phi_3} \Delta \phi_2 + (E_{\theta_3 \phi_3} + \frac{i\omega t_3 M_3 \sin \theta_3}{\gamma}) \Delta \theta_3 + E_{\phi_3 \phi_3} \Delta \phi_3 = 0. \quad (\text{A.32})$$

Por último resolveremos la Ec.(A.9b) para  $i = 3$ :

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial t} = \frac{\gamma}{t_3 M_3 \sin \theta_3} \frac{\partial E}{\partial \theta_3}.$$

De acuerdo a la asunción (3),  $\phi_3 = \phi_3^0 + \Delta \phi_3 \exp(i\omega t)$ , tal que su derivada

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial t} = i\omega \Delta \phi_3 \exp(i\omega t). \quad (\text{A.33})$$

Con esto está determinado el primer miembro de la Ec. (A.9b) para  $i = 3$ . Para el segundo miembro se necesita la derivada de  $E$  respecto de  $\theta_3$ . Para ello hacemos uso, como en los casos anteriores, de la Ec. (A.11); es decir,

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \theta_3} &= \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_3^2} (\theta_2 - \theta_2^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_1 \theta_3} (\theta_1 - \theta_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \theta_3} (\phi_1 - \phi_1^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \theta_3} (\theta_2 - \theta_2^0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2 \theta_3} (\phi_2 - \phi_2^0) + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_3 \phi_3} (\phi_3 - \phi_3^0) \right).\end{aligned}\quad (\text{A.34})$$

Así, la Ec. (A.9b) para  $i = 3$  queda expresada como

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_3}{\partial t} &= \frac{\gamma}{t_3 M_3 \sin \theta_3} \frac{\partial E}{\partial \theta_3} \\ i\omega \Delta \phi_3 \exp(i\omega t) &= \frac{\gamma}{t_3 M_3 \sin \theta_3} (E_{\theta_3 \theta_3} \Delta \theta_3 \exp(i\omega t) + E_{\theta_1 \theta_3} \Delta \theta_1 \exp(i\omega t) \\ &\quad + E_{\phi_1 \theta_3} \Delta \phi_1 \exp(i\omega t) + E_{\theta_2 \theta_3} \Delta \theta_2 \exp(i\omega t) \\ &\quad + E_{\phi_2 \theta_3} \Delta \phi_2 \exp(i\omega t) + E_{\theta_3 \phi_3} \Delta \phi_3 \exp(i\omega t)).\end{aligned}\quad (\text{A.35})$$

Además, eliminando de ambos miembros el término exponencial tenemos:

$$\frac{i\omega t_3 M_3 \sin \theta_3}{\gamma} \Delta \phi_3 = E_{\theta_3 \theta_3} \Delta \theta_3 + E_{\theta_1 \theta_3} \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \theta_3} \Delta \phi_1 + E_{\theta_2 \theta_3} \Delta \theta_2 + E_{\phi_2 \theta_3} \Delta \phi_2 + E_{\theta_3 \phi_3} \Delta \phi_3.$$

Ordenando de forma adecuada, como ya se ha hecho hasta ahora, se obtiene la última ecuación como solución a la ecuación de Landau-Lifshitz:

$$E_{\theta_1 \theta_3} \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \theta_3} \Delta \phi_1 + E_{\theta_2 \theta_3} \Delta \theta_2 + E_{\phi_2 \theta_3} \Delta \phi_2 + E_{\theta_3 \theta_3} \Delta \theta_3 + (E_{\theta_3 \phi_3} - \frac{i\omega t_3 M_3 \sin \theta_3}{\gamma}) \Delta \phi_3 = 0. \quad (\text{A.36})$$

Finalmente se ha encontrado un sistema de 6 ecuaciones, Ec. (A.16), Ec. (A.20), Ec. (A.24), Ec. (A.28), Ec. (A.32) y Ec. (A.36), que vienen a ser la solución a la ecuación de Landau-Lifshitz (Ec. (4.19)), las cuales se pueden ubicar convenientemente del siguiente modo:

$$\begin{aligned} (E_{\theta_1 \phi_1} + \frac{i\omega t_1 M_1 \sin \theta_1}{\gamma}) \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \phi_1} \Delta \phi_1 + E_{\phi_1 \theta_2} \Delta \theta_2 + E_{\phi_1 \phi_2} \Delta \phi_2 + E_{\phi_1 \theta_3} \Delta \theta_3 + E_{\phi_1 \phi_3} \Delta \phi_3 &= 0 \\ E_{\theta_1 \theta_1} \Delta \theta_1 + (E_{\theta_1 \phi_1} - \frac{i\omega t_1 M_1 \sin \theta_1}{\gamma}) \Delta \phi_1 + E_{\theta_1 \theta_2} \Delta \theta_2 + E_{\theta_1 \phi_2} \Delta \phi_2 + E_{\theta_1 \theta_3} \Delta \theta_3 + E_{\theta_1 \phi_3} \Delta \phi_3 &= 0 \\ E_{\theta_1 \phi_2} \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \phi_2} \Delta \phi_1 + (E_{\theta_2 \phi_2} + \frac{i\omega t_2 M_2 \sin \theta_2}{\gamma}) \Delta \theta_2 + E_{\phi_2 \phi_2} \Delta \phi_2 + E_{\phi_2 \theta_3} \Delta \theta_3 + E_{\phi_2 \phi_3} \Delta \phi_3 &= 0 \\ E_{\theta_1 \theta_2} \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \theta_2} \Delta \phi_1 + E_{\theta_2 \theta_2} \Delta \theta_2 + (E_{\theta_2 \phi_2} - \frac{i\omega t_2 M_2 \sin \theta_2}{\gamma}) \Delta \phi_2 + E_{\theta_2 \theta_3} \Delta \theta_3 + E_{\theta_2 \phi_3} \Delta \phi_3 &= 0 \\ E_{\theta_1 \phi_3} \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \phi_3} \Delta \phi_1 + E_{\theta_2 \phi_3} \Delta \theta_2 + E_{\phi_2 \phi_3} \Delta \phi_2 + (E_{\theta_3 \phi_3} + \frac{i\omega t_3 M_3 \sin \theta_3}{\gamma}) \Delta \theta_3 + E_{\phi_3 \phi_3} \Delta \phi_3 &= 0 \\ E_{\theta_1 \theta_3} \Delta \theta_1 + E_{\phi_1 \theta_3} \Delta \phi_1 + E_{\theta_2 \theta_3} \Delta \theta_2 + E_{\phi_2 \theta_3} \Delta \phi_2 + E_{\theta_3 \theta_3} \Delta \theta_3 + (E_{\theta_3 \phi_3} - \frac{i\omega t_3 M_3 \sin \theta_3}{\gamma}) \Delta \phi_3 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones se puede expresar en forma de producto de matrices tal como sigue:

$$\begin{bmatrix} (E_{\theta_1 \phi_1} + iZ_1) & E_{\phi_1 \phi_1} & E_{\phi_1 \theta_2} & E_{\phi_1 \phi_2} & E_{\phi_1 \theta_3} & E_{\phi_1 \phi_3} \\ E_{\theta_1 \theta_1} & (E_{\theta_1 \phi_1} - iZ_1) & E_{\theta_1 \theta_2} & E_{\theta_1 \phi_2} & E_{\theta_1 \theta_3} & E_{\theta_1 \phi_3} \\ E_{\theta_1 \phi_2} & E_{\phi_1 \phi_2} & (E_{\theta_2 \phi_2} + iZ_2) & E_{\phi_2 \phi_2} & E_{\phi_2 \theta_3} & E_{\phi_2 \phi_3} \\ E_{\theta_1 \theta_2} & E_{\phi_1 \theta_2} & E_{\theta_2 \theta_2} & (E_{\theta_2 \phi_2} - iZ_2) & E_{\theta_2 \theta_3} & E_{\theta_2 \phi_3} \\ E_{\theta_1 \phi_3} & E_{\phi_1 \phi_3} & E_{\theta_2 \phi_3} & E_{\phi_2 \phi_3} & (E_{\theta_3 \phi_3} + iZ_3) & E_{\phi_3 \phi_3} \\ E_{\theta_1 \theta_3} & E_{\phi_1 \theta_3} & E_{\theta_2 \theta_3} & E_{\phi_2 \theta_3} & E_{\theta_3 \theta_3} & (E_{\theta_3 \phi_3} - iZ_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \phi_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \phi_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta \phi_3 \end{bmatrix} = 0,$$

donde  $Z_i = -\omega t_i M_i \sin \theta_i^0 / \gamma$  ( $i = 1, 2, 3$ ) y  $\theta_i^0$  es el ángulo obtenido de la minimización de la energía libre.

Si existe solución única no trivial, de este sistema de ecuaciones, entonces el determinante de la matriz de energía debe ser cero. Pero antes de determinar el determinante, se va a calcular las derivadas parciales presentes en la matriz de energía y ver qué términos llegan a ser nulos, de tal manera que simplifique nuestro cálculo. Para ello se tendrá en cuenta las condiciones para el equilibrio dadas en la sección 4.2.1:

$$\theta_1^0 = \theta_2^0 = \theta_3^0 = 90^0.$$

Los otros ángulos,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$ , son obtenidos al resolver las ecuaciones de equilibrio Ec. (4.15). Usando la ecuación de la energía libre (Ec. 4.9), determinamos las derivadas buscadas:

$E_{\theta_1\phi_1}$

$$\begin{aligned} E_{\theta_1\phi_1} &= \frac{\partial^2 E}{\partial\theta_1\partial\phi_1} = \frac{\partial}{\partial\theta_1} \left( \frac{\partial E}{\partial\phi_1} \right) \\ &= t_1 \left[ -M_1 H \cos\theta_1 \sin(\alpha - \phi_1) + \frac{M_1 H_{u1}}{2} \sin(2\theta_1) \sin(2\phi_1) \right] \\ &\quad - J_{bl} \left[ -\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - \sin\theta_1 \cos\theta_2 \right] \\ &\quad - J_{bc} \left[ -\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - \sin\theta_1 \cos\theta_2 \right]^2. \end{aligned}$$

Evalutando en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0$ , nos queda:

$$E_{\theta_1\phi_1} = 0. \quad (\text{A.37})$$

$E_{\theta_1\theta_1}$

$$\begin{aligned} E_{\theta_1\theta_1} &= \frac{\partial^2 E}{\partial\theta_1\partial\theta_1} = \frac{\partial}{\partial\theta_1} \left( \frac{\partial E}{\partial\theta_1} \right) \\ &= t_1 \left[ M_1 H \sin\theta_1 \cos(\alpha - \phi_1) - 4\pi M_1^2 \cos(2\theta_1) - M_1 H_{u1} \cos(2\theta_1) \cos^2\phi_1 \right] \\ &\quad - J_{bl} \left[ -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) - \cos\theta_1 \cos\theta_2 \right] \\ &\quad - J_{bc} \left[ -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) - \cos\theta_1 \cos\theta_2 \right]^2. \end{aligned}$$

Evalutando en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0$  y factorizando  $M_1$  del primer corchete nos queda:

$$\begin{aligned} E_{\theta_1\theta_1} &= t_1 M_1 \left[ H \cos(\alpha - \phi_1) + 4\pi M_1 + H_{u1} \cos^2\phi_1 \right] \\ &\quad + J_{bl} \cos(\phi_1 - \phi_2) - J_{bc} \cos^2(\phi_1 - \phi_2). \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$E_{\theta_1\phi_2}$

$$\begin{aligned} E_{\theta_1\phi_2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial\theta_1\partial\phi_2} = \frac{\partial}{\partial\theta_1} \left( \frac{\partial E}{\partial\phi_2} \right) \\ &= -J_{bl} \left[ \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + \sin\theta_1 \cos\theta_2 \right] \\ &\quad - J_{bc} \left[ \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + \sin\theta_1 \cos\theta_2 \right]^2. \end{aligned}$$

Evaluyendo en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^\circ$ , nos queda:

$$E_{\theta_1\phi_2} = 0. \quad (\text{A.39})$$

$E_{\theta_1\theta_2}$

$$\begin{aligned} E_{\theta_1\theta_2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial\theta_1\partial\theta_2} = \frac{\partial}{\partial\theta_1} \left( \frac{\partial E}{\partial\theta_2} \right) \\ &= -J_{bl} \left[ \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \right] \\ &\quad - J_{bc} \left[ \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \right]^2. \end{aligned}$$

Evaluyendo en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^\circ$ , nos queda:

$$E_{\theta_1\theta_2} = -J_{bl} - J_{bc}. \quad (\text{A.40})$$

$E_{\theta_1\phi_3}$

$$\begin{aligned} E_{\theta_1\phi_3} &= \frac{\partial^2 E}{\partial\theta_1\partial\phi_3} = \frac{\partial}{\partial\theta_1} \left( \frac{\partial E}{\partial\phi_3} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Este resultado cero es entendible ya que en la Ec. (4.9) de la energía no hay ningún término en el que estén presentes  $\theta_1$  y  $\phi_3$  simultáneamente por lo que al derivar parcialmente respecto de estos ángulos, la derivada es cero. Otra forma de deducir esto es que  $\theta_1$  pertenece a la capa FM1 y  $\phi_3$  a la capa AFM y, de acuerdo a la figura 2.1(a), dichas capas están desacopladas (no hay interacción), quedando finalmente:

$$E_{\theta_1\phi_3} = 0. \quad (\text{A.41})$$

$E_{\theta_1\theta_3}$ 

$$\begin{aligned}
E_{\theta_1\theta_3} &= \frac{\partial^2 E}{\partial\theta_1\partial\theta_3} = \frac{\partial}{\partial\theta_1} \left( \frac{\partial E}{\partial\theta_3} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Análogamente al caso anterior,  $\theta_1$  y  $\theta_3$  están desacoplados por lo que al derivar la Ec. (4.9) respecto a esos ángulos el resultado es cero:

$$E_{\theta_1\theta_3} = 0. \quad (\text{A.42})$$

 $E_{\phi_1\phi_1}$ 

$$\begin{aligned}
E_{\phi_1\phi_1} &= \frac{\partial^2 E}{\partial\phi_1\partial\phi_1} = \frac{\partial}{\partial\phi_1} \left( \frac{\partial E}{\partial\phi_1} \right) \\
&= t_1 [M_1 H \sin\theta_1 \cos(\alpha - \phi_1) + M_1 H_{u1} \sin^2\theta_1 \cos(2\phi_1)] \\
&\quad - J_{bl} \left[ -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right] \\
&\quad - J_{bc} \left[ -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right]^2.
\end{aligned}$$

Evalutando en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^\circ$  y factorizando  $M_1$  del corchete, nos queda:

$$\begin{aligned}
E_{\phi_1\phi_1} &= t_1 M_1 [H \cos(\alpha - \phi_1) + H_{u1} \cos(2\phi_1)] \\
&\quad + J_{bl} \cos(\phi_1 - \phi_2) - J_{bc} \cos^2(\phi_1 - \phi_2).
\end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

 $E_{\phi_1\phi_2}$ 

$$\begin{aligned}
E_{\phi_1\phi_2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial\phi_1\partial\phi_2} = \frac{\partial}{\partial\phi_1} \left( \frac{\partial E}{\partial\phi_2} \right) \\
&= -J_{bl} \left[ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right] - J_{bc} \left[ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right]^2.
\end{aligned}$$

Evalutando en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^\circ$  nos queda:

$$E_{\phi_1\phi_2} = -J_{bl} \cos(\phi_1 - \phi_2) - J_{bc} \cos^2(\phi_1 - \phi_2). \quad (\text{A.44})$$

 $E_{\phi_1\theta_2}$ 

$$\begin{aligned}
E_{\phi_1\theta_2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial\phi_1\partial\theta_2} = \frac{\partial}{\partial\phi_1} \left( \frac{\partial E}{\partial\theta_2} \right) \\
&= -J_{bl} \left[ -\sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \right] - J_{bc} \left[ -\sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \right]^2.
\end{aligned}$$

Evaluyendo en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0$  nos queda:

$$E_{\phi_1\theta_2} = 0. \quad (\text{A.45})$$

$$\underline{E_{\phi_1\phi_3}}$$

$$\begin{aligned} E_{\phi_1\phi_3} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \phi_3} = \frac{\partial}{\partial \phi_1} \left( \frac{\partial E}{\partial \phi_3} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como dijimos líneas arriba,  $\phi_1$  y  $\phi_3$  están desacopladas por lo que:

$$E_{\phi_1\phi_3} = 0. \quad (\text{A.46})$$

$$\underline{E_{\phi_1\theta_3}}$$

$$\begin{aligned} E_{\phi_1\theta_3} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_1 \partial \theta_3} = \frac{\partial}{\partial \phi_1} \left( \frac{\partial E}{\partial \theta_3} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aquí, al igual al caso anterior,  $\phi_1$  y  $\phi_3$  están desacoplados por lo que:

$$E_{\phi_1\phi_3} = 0. \quad (\text{A.47})$$

$$\underline{E_{\theta_2\phi_2}}$$

$$\begin{aligned} E_{\theta_2\phi_2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \partial \phi_2} = \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left( \frac{\partial E}{\partial \phi_2} \right) \\ &= t_2 \left[ -M_2 H \cos \theta_2 \sin(\alpha - \phi_2) + \frac{M_2 H_{u2}}{2} \sin(2\theta_2) \cos(2\phi_2) \right. \\ &\quad \left. + M_2 H_E (\cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\phi_2 - \phi_3)) \right] \\ &\quad - J_{bl} \left[ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \right] - J_{bc} \left[ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \right]^2. \end{aligned}$$

Evaluyendo en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0$  nos queda:

$$E_{\theta_2\phi_2} = 0. \quad (\text{A.48})$$

$$\underline{E_{\theta_2\theta_2}}$$

$$\begin{aligned} E_{\theta_2\theta_2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} = \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left( \frac{\partial E}{\partial \theta_2} \right) \\ &= t_2 \left[ M_2 H \sin \theta_2 \cos(\alpha - \phi_2) - 4\pi M_2^2 \cos(2\theta_2) - M_2 H_{u2} \cos(2\theta_2) \cos^2 \phi_2 \right. \\ &\quad \left. - M_2 H_E (-\sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\phi_2 - \phi_3) - \cos \theta_2 \cos \theta_3) \right] \\ &\quad - J_{bl} \left[ -\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right] \\ &\quad - J_{bc} \left[ -\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right]^2. \end{aligned}$$

Evalutando en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0$  nos queda:

$$\begin{aligned} E_{\theta_2\theta_2} &= t_2 M_2 \left[ H \cos(\alpha - \phi_2) + 4\pi M_2 + H_{u2} \cos^2 \phi_2 + M_2 H_E \cos(\phi_2 - \phi_3) \right] \\ &\quad + J_{bl} \cos(\phi_1 - \phi_2) - J_{bc} \cos^2(\phi_1 - \phi_2). \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

$$\underline{E_{\theta_2\phi_3}}$$

$$\begin{aligned} E_{\theta_2\phi_3} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \partial \phi_3} = \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left( \frac{\partial E}{\partial \phi_3} \right) \\ &= t_2 \left[ -M_2 H_E \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\phi_2 - \phi_3) \right]. \end{aligned}$$

Evalutando en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0$  nos queda:

$$E_{\theta_2\phi_3} = 0. \quad (\text{A.50})$$

$$\underline{E_{\theta_2\theta_3}}$$

$$\begin{aligned} E_{\theta_2\theta_3} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2 \partial \theta_3} = \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left( \frac{\partial E}{\partial \theta_3} \right) \\ &= t_2 \left[ -M_2 H_E (\cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos(\phi_2 - \phi_3) + \sin \theta_2 \sin \theta_3) \right]. \end{aligned}$$

Evalutando en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0$  nos queda:

$$E_{\theta_2\theta_3} = -t_2 M_2 H_E. \quad (\text{A.51})$$

$E_{\phi_2\phi_2}$

$$\begin{aligned} E_{\phi_2\phi_2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2 \partial \phi_2} = \frac{\partial}{\partial \phi_2} \left( \frac{\partial E}{\partial \phi_2} \right) \\ &= t_2 \left[ M_2 H \sin \theta_2 \cos(\alpha - \phi_2) + M_2 H_{u2} \sin^2 \theta_2 \cos(2\phi_2) \right. \\ &\quad \left. - M_2 H_E (-\sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\phi_2 - \phi_3)) \right]. \end{aligned}$$

Evalutando en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0$  nos queda:

$$E_{\phi_2\phi_2} = t_2 M_2 \left[ H \cos(\alpha - \phi_2) + H_{u2} \cos(2\phi_2) + H_E \cos(\phi_2 - \phi_3) \right]. \quad (\text{A.52})$$

$E_{\phi_2\phi_3}$

$$\begin{aligned} E_{\phi_2\phi_3} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2 \partial \phi_3} = \frac{\partial}{\partial \phi_2} \left( \frac{\partial E}{\partial \phi_3} \right) \\ &= t_2 \left[ -M_2 H_E (\sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\phi_2 - \phi_3)) \right]. \end{aligned}$$

Evalutando en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0$  nos queda:

$$E_{\phi_2\phi_3} = -t_2 M_2 H_E \cos(\phi_2 - \phi_3). \quad (\text{A.53})$$

$E_{\phi_2\theta_3}$

$$\begin{aligned} E_{\phi_2\theta_3} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_2 \partial \theta_3} = \frac{\partial}{\partial \phi_2} \left( \frac{\partial E}{\partial \theta_3} \right) \\ &= t_2 \left[ -M_2 H_E (-\sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\phi_2 - \phi_3)) \right]. \end{aligned}$$

Evalutando en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0$  nos queda:

$$E_{\phi_2\theta_3} = 0. \quad (\text{A.54})$$



$$\underline{E_{\theta_3\phi_3}}$$

$$\begin{aligned} E_{\theta_3\phi_3} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_3 \partial \phi_3} = \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left( \frac{\partial E}{\partial \phi_3} \right) \\ &= t_2 \left[ -M_2 H_E \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin(\phi_2 - \phi_3) + M_2 H_W \cos \theta_3 \sin \phi_3 \right]. \end{aligned}$$

Evalutando en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0$  nos queda:

$$E_{\theta_3\phi_3} = 0. \quad (\text{A.55})$$

$$\underline{E_{\theta_3\theta_3}}$$

$$\begin{aligned} E_{\theta_3\theta_3} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_3 \partial \theta_3} = \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left( \frac{\partial E}{\partial \theta_3} \right) \\ &= t_2 \left[ -M_2 H_E (-\sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\phi_2 - \phi_3) - \cos \theta_2 \cos \theta_3) + M_2 H_W \sin \theta_3 \cos \phi_3 \right]. \end{aligned}$$

Evalutando en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0$  nos queda:

$$E_{\theta_3\theta_3} = t_2 M_2 \left[ H_E \cos(\phi_2 - \phi_3) + H_W \cos \phi_3 \right]. \quad (\text{A.56})$$

$$\underline{E_{\phi_3\phi_3}}$$

$$\begin{aligned} E_{\phi_3\phi_3} &= \frac{\partial^2 E}{\partial \phi_3 \partial \phi_3} = \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left( \frac{\partial E}{\partial \phi_3} \right) \\ &= t_2 \left[ -M_2 H_E (-\sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\phi_2 - \phi_3) - \cos \theta_2 \cos \theta_3) + M_2 H_W \sin \theta_3 \cos \phi_3 \right]. \end{aligned}$$

Evalutando en  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^0$  nos queda:

$$E_{\phi_3\phi_3} = t_2 M_2 \left[ H_E \cos(\phi_2 - \phi_3) + H_W \cos \phi_3 \right]. \quad (\text{A.57})$$

Si todos los ceros encontrados en los cálculos anteriores lo reemplazamos en la matriz de energía dado anteriormente, se obtiene una matriz simplificada; es decir,

$$\begin{bmatrix} (iZ_1) & E_{\phi_1\phi_1} & 0 & E_{\phi_1\phi_2} & 0 & 0 \\ E_{\theta_1\theta_1} & -iZ_1 & E_{\theta_1\theta_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\phi_1\phi_2} & iZ_2 & E_{\phi_2\phi_2} & 0 & E_{\phi_2\phi_3} \\ E_{\theta_1\theta_2} & 0 & E_{\theta_2\theta_2} & -iZ_2 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ 0 & 0 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\phi_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\phi_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \Delta\phi_3 \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{A.58})$$

donde

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} (iZ_1) & E_{\phi_1\phi_1} & 0 & E_{\phi_1\phi_2} & 0 & 0 \\ E_{\theta_1\theta_1} & -iZ_1 & E_{\theta_1\theta_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\phi_1\phi_2} & iZ_2 & E_{\phi_2\phi_2} & 0 & E_{\phi_2\phi_3} \\ E_{\theta_1\theta_2} & 0 & E_{\theta_2\theta_2} & -iZ_2 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ 0 & 0 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.59})$$

Cabe indicar que en vista que no se ha logrado aún encontrar un método que permita obtener el determinante de la matriz de energía  $\mathbb{A}$  de modo iterativo; se ha obtenido por seguir el método del menor complemento para el cálculo del determinante; es decir,

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= iZ_1 \det \begin{vmatrix} -iZ_1 & E_{\theta_1\theta_2} & 0 & 0 & 0 \\ E_{\phi_1\phi_2} & iZ_2 & E_{\phi_2\phi_2} & 0 & E_{\phi_2\phi_3} \\ 0 & E_{\theta_2\theta_2} & -iZ_2 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ 0 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} - E_{\phi_1\phi_1} \det \begin{vmatrix} E_{\theta_1\theta_1} & E_{\theta_1\theta_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & iZ_2 & E_{\phi_2\phi_2} & 0 & E_{\phi_2\phi_3} \\ E_{\theta_1\theta_2} & E_{\theta_2\theta_2} & -iZ_2 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ 0 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} \\ &\quad - E_{\phi_1\phi_2} \det \begin{vmatrix} E_{\theta_1\theta_1} & -iZ_1 & E_{\theta_1\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & E_{\phi_1\phi_2} & iZ_2 & 0 & E_{\phi_2\phi_3} \\ E_{\theta_1\theta_2} & 0 & E_{\theta_2\theta_2} & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ 0 & 0 & E_{\theta_2\theta_3} & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente el método del menor complemento a cada una de las submatrices obte-

nemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbb{A}) = & iZ_1 \left[ -iZ_1 \det \begin{vmatrix} iZ_2 & E_{\phi_2\phi_2} & 0 & E_{\phi_2\phi_3} \\ E_{\theta_2\theta_2} & -iZ_2 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ 0 & E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ E_{\theta_2\theta_3} & 0 & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} - E_{\theta_1\theta_2} \det \begin{vmatrix} E_{\phi_1\phi_2} & E_{\phi_2\phi_2} & 0 & E_{\phi_2\phi_3} \\ 0 & -iZ_2 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ 0 & E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ 0 & 0 & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} \right. \\
 & - E_{\phi_1\phi_1} \left[ E_{\theta_1\theta_1} \det \begin{vmatrix} iZ_2 & E_{\phi_2\phi_2} & 0 & E_{\phi_2\phi_3} \\ E_{\theta_2\theta_2} & -iZ_2 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ 0 & E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ E_{\theta_2\theta_3} & 0 & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} - E_{\theta_1\theta_2} \det \begin{vmatrix} 0 & E_{\phi_2\phi_2} & 0 & E_{\phi_2\phi_3} \\ E_{\theta_1\theta_2} & -iZ_2 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ 0 & E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ 0 & 0 & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} \right] \\
 & \left. - E_{\phi_1\phi_2} \left[ E_{\theta_1\theta_1} \det \begin{vmatrix} E_{\phi_1\phi_2} & iZ_2 & 0 & E_{\phi_2\phi_3} \\ 0 & E_{\theta_2\theta_2} & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ 0 & E_{\theta_2\theta_3} & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} + E_{\theta_1\theta_2} \det \begin{vmatrix} -iZ_1 & E_{\theta_1\theta_2} & 0 & 0 \\ E_{\phi_1\phi_2} & iZ_2 & 0 & E_{\phi_2\phi_3} \\ 0 & 0 & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ 0 & E_{\theta_2\theta_3} & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} \right] \right].
 \end{aligned}$$

Resolviendo de la misma manera cada submatriz,

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbb{A}) = & Z_1^2 \left[ iZ_2 \det \begin{vmatrix} -iZ_2 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ 0 & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} - E_{\phi_2\phi_2} \det \begin{vmatrix} E_{\theta_2\theta_2} & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ 0 & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ E_{\theta_2\theta_3} & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} \right. \\
 & - E_{\phi_2\phi_3} \det \begin{vmatrix} E_{\theta_2\theta_2} & -iZ_2 & E_{\theta_2\theta_3} \\ 0 & E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 \\ E_{\theta_2\theta_3} & 0 & E_{\theta_3\theta_3} \end{vmatrix} \left. - iZ_1 E_{\theta_1\theta_2} E_{\phi_1\phi_2} \det \begin{vmatrix} -iZ_2 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ 0 & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} \right. \\
 & - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} \left[ iZ_2 \det \begin{vmatrix} -iZ_2 & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ 0 & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} - E_{\phi_2\phi_2} \det \begin{vmatrix} E_{\theta_2\theta_2} & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ 0 & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ E_{\theta_2\theta_3} & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} \right. \\
 & - E_{\phi_2\phi_3} \det \begin{vmatrix} E_{\theta_2\theta_2} & -iZ_2 & E_{\theta_2\theta_3} \\ 0 & E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 \\ E_{\theta_2\theta_3} & 0 & E_{\theta_3\theta_3} \end{vmatrix} \left. - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_2}^2 \det \begin{vmatrix} E_{\phi_2\phi_2} & 0 & E_{\phi_2\phi_3} \\ E_{\phi_2\phi_3} & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ 0 & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} \right. \\
 & - E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_1} \det \begin{vmatrix} E_{\theta_2\theta_2} & E_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ 0 & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ E_{\theta_2\theta_3} & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} - E_{\phi_1\phi_2} E_{\theta_1\theta_2} \left[ -iZ_1 \det \begin{vmatrix} iZ_2 & 0 & E_{\phi_2\phi_3} \\ 0 & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ E_{\theta_2\theta_3} & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} \right. \\
 & \left. \left. - E_{\phi_1\phi_2} \det \begin{vmatrix} E_{\theta_1\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & iZ_3 & E_{\phi_3\phi_3} \\ E_{\theta_2\theta_3} & E_{\theta_3\theta_3} & -iZ_3 \end{vmatrix} \right] \right].
 \end{aligned}$$

Calculando el determinante de las matrices de  $3 \times 3$  y reemplazando obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{A}) = & iZ_1^2 Z_2 \left( -iZ_2(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) + iZ_3 E_{\theta_2\theta_3} E_{\phi_2\phi_3} \right) \\
& - Z_1^2 E_{\phi_2\phi_2} \left( E_{\theta_2\theta_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) + E_{\theta_2\theta_3}^2 E_{\phi_3\phi_3} \right) \\
& - Z_1^2 E_{\phi_2\phi_3} \left( E_{\theta_2\theta_2} E_{\phi_2\phi_3} E_{\theta_3\theta_3} + E_{\theta_2\theta_3}(Z_2 Z_3 - E_{\phi_2\phi_3} E_{\theta_2\theta_3}) \right) \\
& - iZ_1 E_{\theta_1\theta_2} E_{\phi_1\phi_2} \left( -iZ_2(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) + iZ_3 E_{\theta_2\theta_3} E_{\phi_2\phi_3} \right) \\
& - iZ_2 E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} \left( -iZ_2(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) + iZ_3 E_{\theta_2\theta_3} E_{\phi_2\phi_3} \right) \\
& + E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} E_{\phi_2\phi_2} \left( E_{\theta_2\theta_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) + E_{\theta_2\theta_3}^2 E_{\phi_3\phi_3} \right) \\
& + E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} E_{\phi_2\phi_3} \left( E_{\theta_2\theta_2} E_{\phi_2\phi_3} E_{\theta_3\theta_3} + E_{\theta_2\theta_3}(Z_2 Z_3 - E_{\phi_2\phi_3} E_{\theta_2\theta_3}) \right) \\
& - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_2}^2 \left( E_{\phi_2\phi_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) + E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_3\theta_3} \right) \\
& - E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_1} \left( E_{\theta_2\theta_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) + E_{\theta_2\theta_3}^2 E_{\phi_3\phi_3} \right) \\
& + iZ_1 E_{\phi_1\phi_2} E_{\theta_1\theta_2} \left( iZ_2(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) - iZ_3 E_{\phi_2\phi_3} E_{\theta_2\theta_3} \right) \\
& + E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_2} \left( E_{\theta_1\theta_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) \right). \tag{A.60}
\end{aligned}$$

Al operar cada línea de términos identificamos términos interesantes que se ha resaltado con colores, tal que:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{A}) = & Z_1^2 Z_2^2 (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) - Z_1^2 Z_2 Z_3 E_{\theta_2\theta_3} E_{\phi_2\phi_3} \\
& - Z_1^2 E_{\phi_2\phi_2} E_{\theta_2\theta_2} (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) - Z_1^2 E_{\phi_2\phi_2} E_{\theta_2\theta_3}^2 E_{\phi_3\phi_3} \\
& - Z_1^2 E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_2} E_{\theta_3\theta_3} - Z_1^2 Z_2 Z_3 E_{\phi_2\phi_3} E_{\theta_2\theta_3} + Z_1^2 E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_3}^2 \\
& - Z_1 Z_2 E_{\theta_1\theta_2} E_{\phi_1\phi_2} (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) + Z_1 Z_3 E_{\theta_1\theta_2} E_{\phi_1\phi_2} E_{\theta_2\theta_3} E_{\phi_2\phi_3} \\
& - Z_2^2 E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) + Z_2 Z_3 E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} E_{\theta_2\theta_3} E_{\phi_2\phi_3} \\
& + E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} E_{\phi_2\phi_2} E_{\theta_2\theta_2} (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) + E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} E_{\phi_2\phi_2} E_{\theta_2\theta_3}^2 E_{\phi_3\phi_3} \\
& + E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_2} E_{\theta_3\theta_3} + Z_2 Z_3 E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} E_{\phi_2\phi_3} E_{\theta_2\theta_3} - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_3}^2 \\
& - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_2}^2 E_{\phi_2\phi_2} (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_2}^2 E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_3\theta_3} \\
& - E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_1} E_{\theta_2\theta_2} (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) + E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_1} E_{\theta_2\theta_3}^2 E_{\phi_3\phi_3} \\
& - Z_1 Z_2 E_{\phi_1\phi_2} E_{\theta_1\theta_2} (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) + Z_1 Z_3 E_{\phi_1\phi_2} E_{\theta_1\theta_2} E_{\phi_2\phi_3} E_{\theta_2\theta_3} \\
& + E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_2}^2 (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}). \tag{A.61}
\end{aligned}$$

Trabajando primero con los términos de color rojo ( $T_r$ ), tenemos:

$$\begin{aligned}
T_r = & Z_1^2 Z_2^2 (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) - Z_1^2 E_{\phi_2\phi_2} E_{\theta_2\theta_2} (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) \\
& - Z_2^2 E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) + E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} E_{\phi_2\phi_2} E_{\theta_2\theta_2} (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}).
\end{aligned}$$

Factorizando términos semejantes

$$T_r = Z_1^2(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3})(Z_2^2 - E_{\phi_2\phi_2}E_{\theta_2\theta_2}) - E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_1}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3})(Z_2^2 - E_{\phi_2\phi_2}E_{\theta_2\theta_2}).$$

Una última factorización hace que nos quede:

$$T_r = (Z_1^2 - E_{\theta_1\theta_1}E_{\phi_1\phi_1})(Z_2^2 - E_{\phi_2\phi_2}E_{\theta_2\theta_2})(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3}) \quad (\text{A.62})$$

Ahora trabajamos con los términos de color verde ( $T_v$ ), para ello ordenamos convenientemente,

$$\begin{aligned} T_v = & -Z_1^2Z_2Z_3E_{\theta_2\theta_3}E_{\phi_2\phi_3} + Z_2Z_3E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_1}E_{\theta_2\theta_3}E_{\phi_2\phi_3} \\ & -Z_1^2Z_2Z_3E_{\phi_2\phi_3}E_{\theta_2\theta_3} + Z_2Z_3E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_1}E_{\phi_2\phi_3}E_{\theta_2\theta_3} \\ & -Z_1Z_2E_{\theta_1\theta_2}E_{\phi_1\phi_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3}) - Z_1Z_2E_{\phi_1\phi_2}E_{\theta_1\theta_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3}). \end{aligned}$$

Factorizando términos semejantes,

$$\begin{aligned} T_v = & -Z_2Z_3E_{\theta_2\theta_3}E_{\phi_2\phi_3}(Z_1^2 - E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_1}) - Z_2Z_3E_{\phi_2\phi_3}E_{\theta_2\theta_3}(Z_1^2 - E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_1}) \\ & -Z_1Z_2E_{\theta_1\theta_2}E_{\phi_1\phi_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3}) - Z_1Z_2E_{\phi_1\phi_2}E_{\theta_1\theta_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3}). \end{aligned}$$

Ahora, sumando obtenemos:

$$T_r = -2Z_2Z_3E_{\theta_2\theta_3}E_{\phi_2\phi_3}(Z_1^2 - E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_1}) - 2Z_1Z_2E_{\theta_1\theta_2}E_{\phi_1\phi_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3}) \quad (\text{A.63})$$

Análogamente para los términos de color azul ( $T_a$ ), agrupando convenientemente para facilitar la factorización,

$$\begin{aligned} T_a = & -Z_1^2E_{\phi_2\phi_2}E_{\theta_2\theta_3}^2E_{\phi_3\phi_3} + E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_1}E_{\phi_2\phi_2}E_{\theta_2\theta_3}^2E_{\phi_3\phi_3} \\ & -Z_1^2E_{\phi_2\phi_3}^2E_{\theta_2\theta_2}E_{\theta_3\theta_3} + E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_1}E_{\phi_2\phi_3}^2E_{\theta_2\theta_2}E_{\theta_3\theta_3} \\ & +Z_1^2E_{\phi_2\phi_3}^2E_{\theta_2\theta_3}^2 - E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_1}E_{\phi_2\phi_3}^2E_{\theta_2\theta_3}^2 \\ & -E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_2}^2E_{\phi_2\phi_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3}) \\ & -E_{\phi_1\phi_2}^2E_{\theta_1\theta_1}E_{\theta_2\theta_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3}) \\ & +E_{\phi_1\phi_2}^2E_{\theta_1\theta_2}^2(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3}). \end{aligned}$$

Factorizando en las tres primeras líneas obtenemos:

$$\begin{aligned} T_a = & -E_{\phi_2\phi_2}E_{\theta_2\theta_3}^2E_{\phi_3\phi_3}(Z_1^2 - E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_1}) \\ & -E_{\phi_2\phi_3}^2E_{\theta_2\theta_2}E_{\theta_3\theta_3}(Z_1^2 - E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_1}) \\ & +E_{\phi_2\phi_3}^2E_{\theta_2\theta_3}^2(Z_1^2 - E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_1}) \\ & -E_{\phi_1\phi_1}E_{\theta_1\theta_2}^2E_{\phi_2\phi_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3}) \\ & -E_{\phi_1\phi_2}^2E_{\theta_1\theta_1}E_{\theta_2\theta_2}(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3}) \\ & +E_{\phi_1\phi_2}^2E_{\theta_1\theta_2}^2(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3}E_{\phi_3\phi_3}) \end{aligned}$$

De la misma manera, factorizando en las tres primeras líneas

$$T_a = (E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_3}^2 - E_{\phi_2\phi_2} E_{\theta_2\theta_3}^2 E_{\phi_3\phi_3} - E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_2} E_{\theta_3\theta_3})(Z_1^2 - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1}) \\ + (E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_2}^2 - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_2}^2 E_{\phi_2\phi_2} - E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_1} E_{\theta_2\theta_2})(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) \quad (A.64)$$

Finalmente, los términos de color negro ( $T_n$ ) quedarían así:

$$T_n = 2Z_1 Z_3 E_{\theta_1\theta_2} E_{\phi_1\phi_2} E_{\theta_2\theta_3} E_{\phi_2\phi_3} + E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_1} E_{\theta_2\theta_3}^2 E_{\phi_3\phi_3} - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_2}^2 E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_3\theta_3}. \quad (A.65)$$

Juntando la Ec. (A.62), Ec. (A.63), Ec. (A.64) y Ec. (A.65) el determinante de la matriz  $\mathbb{A}$  se puede expresar como sigue:

$$\det(\mathbb{A}) = (Z_1^2 - E_{\theta_1\theta_1} E_{\phi_1\phi_1})(Z_2^2 - E_{\phi_2\phi_2} E_{\theta_2\theta_2})(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) \\ - 2Z_2 Z_3 E_{\theta_2\theta_3} E_{\phi_2\phi_3} (Z_1^2 - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1}) - 2Z_1 Z_2 E_{\theta_1\theta_2} E_{\phi_1\phi_2} (Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) \\ + (E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_3}^2 - E_{\phi_2\phi_2} E_{\theta_2\theta_3}^2 E_{\phi_3\phi_3} - E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_2} E_{\theta_3\theta_3})(Z_1^2 - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1}) \\ + (E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_2}^2 - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_2}^2 E_{\phi_2\phi_2} - E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_1} E_{\theta_2\theta_2})(Z_3^2 - E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}) \\ + 2Z_1 Z_3 E_{\theta_1\theta_2} E_{\phi_1\phi_2} E_{\theta_2\theta_3} E_{\phi_2\phi_3} + E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_1} E_{\theta_2\theta_3}^2 E_{\phi_3\phi_3} - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_2}^2 E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_3\theta_3}. \quad (A.66)$$

Para que la ec. (A.58) tenga solución no trivial, este determinante tiene que ser cero. Para ello se puede dar la forma de un polinomio en  $Z_i$ :

$$0 = Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 - Z_1^2 Z_2^2 E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3} - Z_1^2 Z_3^2 E_{\theta_2\theta_2} E_{\phi_2\phi_2} - Z_2^2 Z_3^2 E_{\theta_1\theta_1} E_{\phi_1\phi_1} \\ - 2Z_1^2 Z_2 Z_3 E_{\theta_2\theta_3} E_{\phi_2\phi_3} - 2Z_1 Z_2 Z_3^2 E_{\phi_1\phi_2} E_{\theta_1\theta_2} \\ + Z_1^2 (E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_3}^2 - E_{\phi_2\phi_2} E_{\theta_2\theta_3}^2 E_{\phi_3\phi_3} - E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_2} E_{\theta_3\theta_3}) \\ + Z_2^2 E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3} \\ + Z_3^2 (E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_2}^2 - E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_2}^2 E_{\phi_2\phi_2} - E_{\phi_1\phi_2}^2 E_{\theta_1\theta_1} E_{\theta_2\theta_2}) \\ + 2Z_1 Z_2 E_{\theta_1\theta_2} E_{\phi_1\phi_2} E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3} + 2Z_1 Z_3 E_{\theta_1\theta_2} E_{\phi_1\phi_2} E_{\theta_2\theta_3} E_{\phi_2\phi_3} \\ + 2Z_2 Z_3 E_{\theta_2\theta_3} E_{\phi_2\phi_3} E_{\phi_1\phi_1} E_{\theta_1\theta_1} \\ + (E_{\theta_3\theta_3} E_{\theta_1\theta_2}^2 - E_{\theta_1\theta_1} (E_{\theta_2\theta_2} E_{\theta_3\theta_3} - E_{\theta_2\theta_3}^2))(E_{\phi_3\phi_3} E_{\phi_1\phi_2}^2 - E_{\phi_1\phi_1} (E_{\phi_3\phi_3} E_{\phi_2\phi_2} - E_{\phi_2\phi_3}^2)), \quad (A.67)$$

siendo ésta, la ecuación de la relación de dispersión, donde

$$Z_i = \frac{\omega t_i M_i \sin \theta_i^0}{\gamma}.$$

Asimismo, de acuerdo al sistema de coordenadas propuesto en el presente trabajo,  $\sin \theta_i^0 = 90^0$  para  $i = 1, 2, 3$  por lo que:

$$Z_i = \frac{\omega t_i M_i}{\gamma}$$

Por otro lado, en este estudio  $M_3 = 0$ , ya que se trata de la magnetización de la capa AFM que no presenta magnetización neta. Además, cabe resaltar que se introdujo sólo la dirección de una subred antiferromagnética  $\vec{M}_3$  para la aplicación del modelo de Mauri, por lo que

$$Z_3 = 0.$$

Reemplazando esto en nuestra ecuación de dispersión obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 = & -Z_1^2 Z_2^2 E_{\theta_3 \theta_3} E_{\phi_3 \phi_3} + Z_1^2 (E_{\phi_2 \phi_3}^2 E_{\theta_2 \theta_3}^2 - E_{\phi_2 \phi_2} E_{\theta_2 \theta_3}^2 E_{\phi_3 \phi_3} - E_{\phi_2 \phi_3}^2 E_{\theta_2 \theta_2} E_{\theta_3 \theta_3}) \\ & + Z_2^2 E_{\phi_1 \phi_1} E_{\theta_1 \theta_1} E_{\theta_3 \theta_3} E_{\phi_3 \phi_3} + 2Z_1 Z_2 E_{\theta_1 \theta_2} E_{\phi_1 \phi_2} E_{\theta_3 \theta_3} E_{\phi_3 \phi_3} \\ & - \left( E_{\theta_3 \theta_3} E_{\theta_1 \theta_2}^2 - E_{\theta_1 \theta_1} (E_{\theta_2 \theta_2} E_{\theta_3 \theta_3} - E_{\theta_2 \theta_3}^2) \right) \times \\ & \left( E_{\phi_3 \phi_3} E_{\phi_1 \phi_2}^2 - E_{\phi_1 \phi_1} (E_{\phi_3 \phi_3} E_{\phi_2 \phi_2} - E_{\phi_2 \phi_3}^2) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Multiplicando por  $-1/(E_{\theta_3 \theta_3} E_{\phi_3 \phi_3})$  tenemos

$$\begin{aligned} 0 = & Z_1^2 Z_2^2 - Z_1^2 \left( \frac{E_{\phi_2 \phi_3}^2 E_{\theta_2 \theta_3}^2}{E_{\theta_3 \theta_3} E_{\phi_3 \phi_3}} - \frac{E_{\phi_2 \phi_2} E_{\theta_2 \theta_3}^2}{E_{\theta_3 \theta_3}} - \frac{E_{\phi_2 \phi_3}^2 E_{\theta_2 \theta_2}}{E_{\phi_3 \phi_3}} \right) \\ & - Z_2^2 E_{\phi_1 \phi_1} E_{\theta_1 \theta_1} - 2Z_1 Z_2 E_{\theta_1 \theta_2} E_{\phi_1 \phi_2} \\ & + \left( E_{\theta_1 \theta_2}^2 - E_{\theta_1 \theta_1} (E_{\theta_2 \theta_2} - \frac{E_{\theta_2 \theta_3}^2}{E_{\theta_3 \theta_3}}) \right) \times \left( E_{\phi_1 \phi_2}^2 - E_{\phi_1 \phi_1} (E_{\phi_2 \phi_2} - \frac{E_{\phi_2 \phi_3}^2}{E_{\phi_3 \phi_3}}) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Reemplazando  $Z_1 = \omega t_1 M_1 / \gamma$  y  $Z_2 = \omega t_2 M_2 / \gamma$  queda:

$$\begin{aligned} 0 = & \left( \frac{\omega t_1 M_1}{\gamma} \right)^2 \left( \frac{\omega t_2 M_2}{\gamma} \right)^2 - \left( \frac{\omega t_1 M_1}{\gamma} \right)^2 \left( \frac{E_{\phi_2 \phi_3}^2 E_{\theta_2 \theta_3}^2}{E_{\theta_3 \theta_3} E_{\phi_3 \phi_3}} - \frac{E_{\phi_2 \phi_2} E_{\theta_2 \theta_3}^2}{E_{\theta_3 \theta_3}} - \frac{E_{\phi_2 \phi_3}^2 E_{\theta_2 \theta_2}}{E_{\phi_3 \phi_3}} \right) \\ & - \left( \frac{\omega t_2 M_2}{\gamma} \right)^2 E_{\phi_1 \phi_1} E_{\theta_1 \theta_1} - 2 \left( \frac{\omega t_1 M_1}{\gamma} \right) \left( \frac{\omega t_2 M_2}{\gamma} \right) E_{\theta_1 \theta_2} E_{\phi_1 \phi_2} \\ & + \left( E_{\theta_1 \theta_2}^2 - E_{\theta_1 \theta_1} (E_{\theta_2 \theta_2} - \frac{E_{\theta_2 \theta_3}^2}{E_{\theta_3 \theta_3}}) \right) \times \left( E_{\phi_1 \phi_2}^2 - E_{\phi_1 \phi_1} (E_{\phi_2 \phi_2} - \frac{E_{\phi_2 \phi_3}^2}{E_{\phi_3 \phi_3}}) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Multiplicando por  $1/(t_1 M_1 t_2 M_2)^2$  tenemos

$$\begin{aligned}
 0 = & \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 \left( \frac{E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_3}^2}{E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}} - \frac{E_{\phi_2\phi_2} E_{\theta_2\theta_3}^2}{E_{\theta_3\theta_3}} - \frac{E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_2}}{E_{\phi_3\phi_3}} \right) \times \left(\frac{1}{t_2 M_2}\right)^2 \\
 & - \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 E_{\phi_1\phi_1\theta_1\theta_1} \times \left(\frac{1}{t_1 M_1}\right)^2 - 2 \left(\frac{\omega}{\gamma}\right) \left(\frac{\omega}{\gamma}\right) E_{\theta_1\theta_2} E_{\phi_1\phi_2} \times \left(\frac{1}{t_1 M_1 t_2 M_2}\right) \\
 & + \left[ \left( E_{\theta_1\theta_2}^2 - E_{\theta_1\theta_1} (E_{\theta_2\theta_2} - \frac{E_{\theta_2\theta_3}^2}{E_{\theta_3\theta_3}}) \right) \times \right. \\
 & \left. \left( E_{\phi_1\phi_2}^2 - E_{\phi_1\phi_1} (E_{\phi_2\phi_2} - \frac{E_{\phi_2\phi_3}^2}{E_{\phi_3\phi_3}}) \right) \right] \times \left(\frac{1}{t_1 M_1 t_2 M_2}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{A.71}$$

Finalmente, factorizando y operando los términos con  $(\omega/\gamma)^2$  queda:

$$\begin{aligned}
 0 = & \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^4 - \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 \left[ \left( \frac{E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_3}^2}{E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}} - \frac{E_{\phi_2\phi_2} E_{\theta_2\theta_3}^2}{E_{\theta_3\theta_3}} - \frac{E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_2}}{E_{\phi_3\phi_3}} \right) \frac{1}{(t_2 M_2)^2} \right. \\
 & \left. + E_{\phi_1\phi_1\theta_1\theta_1} \times \frac{1}{(t_1 M_1)^2} + 2 E_{\theta_1\theta_2} E_{\phi_1\phi_2} \times \left(\frac{1}{t_1 M_1 t_2 M_2}\right) \right] \\
 & + \left[ \left( E_{\theta_1\theta_2}^2 - E_{\theta_1\theta_1} (E_{\theta_2\theta_2} - \frac{E_{\theta_2\theta_3}^2}{E_{\theta_3\theta_3}}) \right) \times \right. \\
 & \left. \left( E_{\phi_1\phi_2}^2 - E_{\phi_1\phi_1} (E_{\phi_2\phi_2} - \frac{E_{\phi_2\phi_3}^2}{E_{\phi_3\phi_3}}) \right) \right] \frac{1}{(t_1 M_1 t_2 M_2)^2}.
 \end{aligned} \tag{A.72}$$

Esta ecuación, puede expresarse de forma resumida como sigue:

$$\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^4 - b \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 + c = 0, \tag{A.73}$$

la cual viene a ser la relación de dispersión para un sistema válvula de espín mostrado en la figura



2.1, concordante con [Azevedo 05], donde:

$$\begin{aligned}
 b &= \left( \frac{E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_3}^2}{E_{\theta_3\theta_3} E_{\phi_3\phi_3}} - \frac{E_{\phi_2\phi_2} E_{\theta_2\theta_3}^2}{E_{\theta_3\theta_3}} - \frac{E_{\phi_2\phi_3}^2 E_{\theta_2\theta_2}}{E_{\phi_3\phi_3}} \right) \frac{1}{(t_2 M_2)^2} \\
 &\quad + E_{\phi_1\phi_1\theta_1\theta_1} \times \frac{1}{(t_1 M_1)^2} + 2E_{\theta_1\theta_2} E_{\phi_1\phi_2} \times \left( \frac{1}{t_1 M_1 t_2 M_2} \right) \\
 c &= + \left[ \left( E_{\theta_1\theta_2}^2 - E_{\theta_1\theta_1} \left( E_{\theta_2\theta_2} - \frac{E_{\theta_2\theta_3}^2}{E_{\theta_3\theta_3}} \right) \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \left( E_{\phi_1\phi_2}^2 - E_{\phi_1\phi_1} \left( E_{\phi_2\phi_2} - \frac{E_{\phi_2\phi_3}^2}{E_{\phi_3\phi_3}} \right) \right) \right] \frac{1}{(t_1 M_1 t_2 M_2)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{A.74}$$



# Bibliografía

- [Alayo 11] W. Alayo, M. A. Souza, F. Pelegri, and E. Baggio-Saitovitch, J. Appl. Phys. 109, 83917 (2011)-
- [Alayo 09] W. alayo, Y.T. Xing, and E. Baggio-Saitovitch, J. Appl. Phys. **106**, 113903 (2009).
- [Allan 01] Roy A. Allan, A History of the Personal Computer, Allan Publishing, 2001
- [Ament 55] W. S. Ament and G. T. Rado, Phys. Rev. **97**, 1558 (1955).
- [Arkad 12] Arkad'yev, V. K., *J. Russ. Phys. Chem. soc., Phys. Part*, **44**, 165 (1912)
- [Arns 98] R. G. Arns, "The other transistor: early history of the metal-oxide semiconductor field-effect transistor,"Engineering Science and Education Journal, vol. 7, no. 5 1988
- [Azevedo 05] L. Rodríguez-Suárez, S. M. Rezende, and A. Azevedo, Phys. Rev. b, 71, 224406 (2005)
- [Baberschke 07] Klaus Baberschke 2007 in H. Kronmüller and S. S. Parkin, Eds. *Handbook of Magnetism and Advanced Magnetic Materials* Vol. **3** 1627 John Wiley & Sons, Ltd.
- [Bader 99] Z. Q. Qiu, S.D. Bader, J. Magn. Magn. Mater. 200, 664 (1999).
- [Baibich 88] M.N. Baibich, J. M. Broto, A. Fert, F. Nguyen Van Dau, and F. Petroff, Phys. Rev. Lett., vol. 61, pp.2472, 1988
- [Belleson 98] J. Belleson and E. Grochowski. The era of giant magnetoresistive heads. <https://www1.hgst.com/hdd/technolo/gmr/gmr.htm>
- [Berkowitz 99] A.E. Berkowitz, Kentaro Takano, *Exchange anisotropy - a review*, J. Magn. Magn. Mater. **200** (1999).
- [Binash 89] G. Binasch, P. Grünberg, F. Saurenbach and W. Zinn. Enhanced magnetoresistance in layered magnetic structures with antiferromagnetic interlayer exchange. Phys. Rev. B. **39**, 4828-4830 (1989).

- [Bruno 91] P. Bruno and C. Chappert, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1602 (1991).
- [Bruno 93] P. Bruno, *J. Magn. Magn. Mater.* **121**, 248-252 (1993).
- [Bland 94] A. Bland, B. Heinrich, *Ultrathin magnetic structures*, Vol. II, chapter 2, Springer (1994)
- [Bruno 95] P. Bruno, *Phys. Rev. B* **52**, 411 (1995).
- [Bruno 99] P. Bruno, *J. Phys.: Condens. Matter* **11**, 9403-9419 (1999).
- [Bruno 02] P. Bruno, *Interlayer Exchange Interactions in Magnetic Multilayers* in Joel S. Miller and Marc Drillon, "Magnetism: Molecules to Materials III Nanosized Magnetic Materials" WILEY-VCH, Weinheim, 2002.
- [Cullen 92] J. R. Cullen, *J. Magn. Magn. Mater.* **104-107**, 1840 (1992).
- [Demokritov 98] S. O. Demokritov, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **31**, 925-941 (1998).
- [Depla 08] D. Depla, S. Mahieu, *Reactive Sputter Deposition*. Springer 2008.
- [Dieny 91] B. Dieny et al., "Magnetotransport Properties of Magnetically Soft Spin-Valve Structures", *J. Appl. Phys.*, vol. 69, no. 8, p. 47774, April 1991
- [Edward 91] D.M. Edwards, J. Mathon, R.B. Muniz and M.S. Phan, *Phys. Rev. Lett* **67**, 493-496 (1991).
- [Erickson 93] R. P. Erickson, K. B. Hathaway, and J. R. Cullen, *Phys. Rev. B* **47**, 2626 (1993).
- [Farle 98] M. Farle, *Rep. Prog. Phys.* **61**, 755 (1998).
- [Fuke 97] H. H. Fuke, K. Saito, Y. Kamiguchi, H. Iwasaki and M. Sahashi. Spin-valve giant magnetoresistive films with antiferromagnetic Ir-Mn layers. *J. Appl. Phys.* **81**, 4004-4006 (1997).
- [Geshev01] J. Geshev, L. G. Pereira, and J. E. Schmidt, *Phys. Rev. B*, 64, 184411 (2001)
- [Getzlaff 08] Mathias Getzlaff, *Fundamentals of Magnetism*, ISBN:978-3-540-31150-8, Springer 2008.
- [Griffiths 46] J.H. Griffiths, *Nature* **168**, 670 (1946).
- [Grünberg 86] P. Grünberg, R. Schreiber, Y. Pang, M. Brodsky, H. Sowers, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2442 (1986)
- [Grünberg 91] Grünberg P, Demokritov S O, Fuss A, Vohl M and Wolf J A 1991 *J. Appl. Phys.* **69** 4789

- [Guimarães 09] A.P. Guimarães, Principles of nanomagnetism, pp 38 CBPF 2009
- [Gurevich 96] A.G. Gurevich, G.A. Melkov, Magnetization Oscillations and Waves, CRC Press, Inc. 1996
- [Hwan 08] J. Hwan et al., J. Vac. Sci. Technol. A26(1) (2008) 146-150.
- [Ikeda 10] Ikeda, K. Miura, H. Yamamoto, K. Mizunuma, H. D. Gan, M. Endo, S. Kanai, J. Hayakawa, F. Matsukura and H. Ohno, *A perpendicular-Anisotropy CoFeB-MgO magnetic tunnel junction*. Nature Mater. 2804 (2010).
- [Jackson 98] J. David Jackson, Classical Electrodynamics, pp. 195-198, New York: John Wiley & Sons, Inc. 1998
- [Johnson 96] M.T. Johnson, P.J.H. Bloemen, F.J.A. den Broeder and J.J. de Vries, Magnetic anisotropy in metallic multilayers, Rep. Prog. Phys. **59** (1996) 1409-1458
- [Kasuya 56] T. Kasuya, Prog. Theor. Phys. **16**, 45, 58 (1956)
- [Kittel 58] C. Kittel, Phys. Rev. **110**, 836 (1958).
- [Kittel 93] C. Kittel, Introducción a la física del estado sólido, 3<sup>ra</sup> Ed., Reverté, 1993.
- [Kools 96] J. C. S. Kools. Exchange Biased Spin-Valves for Magnetic Storage. *IEEE Tran. Magn.* **32**, 3165-3184 (1996).
- [Kübler 00] J. K. Kübler, *Theory of itinerant electron magnetism*, pp. 256-266, Clarendon Press; Oxford University Press (2000).
- [Landau 35] L. Landau, E. Lifshitz: Phys. Z. Sowjetunion **8**, 153 (1935)
- [Landau 65] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., To the thory of the dispersion of the ferromagnetic-body permeability, in Landau L, D., *Collected papers*, ter Harrar, D., Ed., Pergamon, Oxford, (1965).
- [Layadi 05] A. Layadi, Phys. Rev. B 72, 024444 (2005)
- [Layadi 01] A. Layadi, Phys. Rev. B **63**, 174410 (2001)
- [Lederman 99] M. Lederman. Performance of Metallic Antiferromagnets for Use in Spin-Valve Read Sensors. *IEEE Trans. Magn.* **35**, 794-799 (1999)
- [Lindner 03] J. Lindner and K. Barberschke, Ferromagnetic resonance in coupled ultrathin films, J. Phys. Condens. Matter 15 (2003) S465-S478.
- [Liu 06] X. Liu and J.K. Furdyna, J. Phys.: Condens. Matter **18**, R245 (2006)
- [Mahan 00] Mahan, John E., Physical Vapor Deposition of Thin Films, pp. 336. ISBN 0-471-33001-9, Wiley-VCH, January 2000.

- [Majkrzak 86] C. F. Majkrzak, J. W. Cable, J. Kwo, M. Hong, D. B. McWhan, Y. Yafet, J. V. Waszcak, and C. Vettier, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2700 (1986).
- [Malozemoff 88] A.P. Malozemoff, *Phys. Rev. B*, **35**, 3679 (1987), *Phys. Rev. B* **37**, 7673 (1988).
- [Mauri 87] D. Mauri, H. C. Siegmann, P. S. Bagus, and E. Kay, *J. Appl. Phys.* **62**, 3047 (1987).
- [Meiklejohn 56] W. H. Meiklejohn and C.P. Bean, *Phys. Rev.* **102**, 1413 (1956).
- [Meiklejohn 57] W. H. Meiklejohn and C.P. Bean, *Phys. Rev.* **105**, 904 (1957).
- [Michael 00] Michael P. Marder (2000), *Condensed Matter Physics*, John Wiley & Sons. p. 671.
- [Parkin 90] Parkin S. S. P, More N. and Roche K. P. Oscillations in exchange coupling and magnetoresistance in metallic superlattice structures: Co/Ru, Co/Cr, Fe/Cr. *Phys. Rev. Lett.* **64** 2304-2407 (1990)
- [Pelegri 06] V. P. Nascimento, E. Baggio Saitovitch, F. Pelegri, L. C. Figueiredo, A. Biondo, E. C. Passamani. *Ferromagnetic resonance study of the exchange bias field in NiFe/FeMn/NiFe* trilayers. *J. Appl. Phys.* **99**, 08C108 (2006).
- [Penning 35] F. M. Penning, U.S. Patent 2,146,025 (Feb. 1935).
- [Peter 10] Peter M. Martin, *Handbook of Deposition Technologies for Films and Coatings: Science, Applications and Technology*, Elsevier, Inc, 2010.
- [Rezende 98] S.M. Rezende, C. Chesman, M.A. Lucena, A. Azevedo, F.M. de Aguir, S. S. P. Parkin, *J. Appl. Phys.* **84**, 958 (1998).
- [Rüehrig 91] Rüehrig M, Schäfer R, Hubert A, Mosler R, Wolf J A, Demokritov S. O. and Grünberg P. 1991 *Phys. Status Solidi a* **125** 635.
- [Ruderman 54] M. A. Ruderman and C. Kittel, *Phys. Rev.* **96**, 99 (1954)
- [Slonc 95] J.C. Slonczewski, *J. Magn. Magn. Mater.* **150**, 13-24 (1995)
- [Smit 55] Smit and H. G. Beljers, *Philips Res. Rep.* **10**, 113 (1955)
- [Smith 96] N. Smith, A.M. Zeltser and M.R. Parker, "GMR multilayers and head design for ultrahigh density magnetic recording", *IEEE Trans Magn*, vol. 32, pp. 135-141, 1996.
- [Squires 97] G.L. Squires, *Introduction to the Theory of Thermal Neutron Scattering* (Dover, New York, 1997)

- [Stiles 99] M. D. Stiles, J. Magn. Magn. Mater. **150**, 13 (1995).
- [Stamps 00] R.L. Stamps, Mechanisms of exchange bias, J. Phys. D: Appl. Phys. **33** (2000).
- [Suhl 55] Suhl, H., Ferromagnetic resonance in nickel ferrite between one and two kilomegacycles, Phys. Rev., **97**, No. 2, 555, (1955)
- [Tsang 94] Tsang et al., “Desing, Fabrication and Testing Of Spin Valve Read Heads For High Density Recording”, IEEE Trans. Mag., vol. 30, no. 6, p. 3801, Nov. 1994.
- [Walker 57] L. R. Walker, Phys. Rev. **105**, 390 (1957).
- [Westwood 03] W.D. Westwood, Sputter deposition, AVS Education Committee Book Series, Vol. 2, AVS, New York (2003).
- [Wolf 01] Wolf S.A., Awschalom D.D., Buhrman R.A., Daughton J.M., von Molnar S., Roukes M.L., and A. Y. Chtchelkanova D.M., Spintronics: A spin-based electronics vision for the future, Science 294, 1488-1495 (2001).
- [Yafet 87] Y. Yafet, *Phys. Rev. B* 36, 3948-3949 (1987).
- [Yosida 57] K. Yosida, Phys. Rev. **106**, 893 (1957).
- [Zhang 94] Z. Zhang, L. Zhou, and P. E. Wigen, Phys. Rev. B, Vol. 50, 9 (1994).





# Agradecimiento

Primeramente quiero agradecer a Dios porque durante toda esta travesía desde que empecé los estudios de pregrado hasta la culminación de la redacción de esta tesis, su gracia, misericordia y amor nunca me faltaron a pesar de mis constantes oscilaciones respecto de su obediencia; encontré en la oración y su palabra la paz y las fuerzas para levantarme y continuar. Asimismo, quiero agradecer de manera especial a la persona que asesoró este trabajo de tesis, al Dr. Carlos Landauro Sáenz, por ser un ejemplo de un buen profesional e investigador comprometido con el desarrollo científico de nuestro país. También quiero agradecerle por la orientación durante todo el transcurso de redacción de la tesis y las innumerables sugerencias precisas, por sus consejos, su preocupación incondicional y sobre todo su paciencia y por toda la ayuda que me brindó para culminar el presente trabajo. Gracias Prof. Carlos, sus enseñanzas hacen eco en mi labor como docente en mis alumnos de secundaria.

Quiero agradecer también a mi esposa Ivette por su comprensión, amor y apoyo durante este tiempo de escritura. A mis padres, María y Priscilo por ser los hombros sobre los que caminé todo este tiempo, por su apoyo constante y por su amor que nunca me faltaron y por la educación que me dieron.

Expreso mi reconocimiento al Grupo de Investigación de Materia Condensada (GIMC) de la Facultad de Ciencias Físicas de la UNMSM y a todos los integrantes del GIMC, entre profesores y estudiantes, que no les menciono porque de seguro me olvido de algún nombre, que me apoyaron académica y profesionalmente a través de las innumerables discusiones relacionados a nuestros trabajos de investigación, discusiones que nunca se olvidan. Agradezco a mi Dios por permitirme ser, aún, miembro de este grupo selecto donde he aprendido y sigo aprendiendo cosas realmente importantes para mi vida. También expreso mi agradecimiento al Dr. William Alayo del Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) por haberme facilitado sus datos experimentales de resonancia ferromagnética.

Mis agradecimientos a los profesores de la Facultad de Ciencias Físicas de la UNMSM que me dictaron cursos en estos cinco años que duró el pregrado. Pues las materias que suministraron ayudaron a mi formación profesional.